

الكتاب الجامعي ٢٢

مبادئ الطرق الاحصائية

الدكتور جلال الصياد　　الدكتور عبد الحميد محمد ربيع

الطبعة الأولى
١٤٠٤هـ - ١٩٨٣م
جدة - المملكة العربية السعودية

بسم الله الرحمن الرحيم

الناشـــر

تهـامـة

جـدة - المملكة العربية السعودية

ص.ب : ٥٤٥٥ - هاتف : ٦٤٤٤٤٤٤

مبادئ الطرق الاحصائية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

«صدق الله العظيم»

(سورة الجن)



مقدمة

هذا هو الكتاب الثاني لطلاب الدراسات الاقتصادية والادارية يتناول مبادىء طرق تحليل البيانات أو ما يسمى بالطرق الإحصائية والاستدلال الإحصائي. ويحتوي على مباىء نظرية الاحتمالات معروضة بطريقة بسيطة لا تحتاج إلى رياضيات متقدمة. كما يحتوي الكتاب على التوزيعات الاحتمالية ومبادىء العينات وتحليل بيانات العينات الكبيرة والصغيرة مستخدمين فترات الثقة واختبارات الفروض بعرض بسيط.

وقد عملنا على عدم التعرض للمفاهيم الدقيقة للنظريات الإحصائية والتي تحتاج إلى قدر كبير من التحليل الرياضي. كما حرصنا على عرض الموضوعات بطريقة مبسطة تعتمد على إيضاح الطريقة دون التعرض للنظرية مع تقديم عدد كبير من الأمثلة العملية مما يساعد على سهولة فهم واستخدام هذه الموضوعات في الحياة العملية.

ونود أن نقدم الشكر الجزيل إلى عدد كبير من الإخوة الزملاء الذين ساهموا بتزو يد المكتبة العر بية بعدد غير قليل من الكتب الإحصائية التي استفدنا منها كثيرا.

والله وليّ التوفيق،،

المؤلفان

الباب الأول

مبادىء الاحتمالات

مباديء الاحتمالات

(١ــ١) ــ مقدمة :

تلعب الاحتمالات دورا خاصا في الحياة اليومية وفي كثيرمن العلوم لأنها تستخدم في قياس عدم التأكد، فكثيرا ما نقابل بعملية اتخاذ قرارات بناء على معلومات ناقصة ونعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار. فمثلا قد نلغي رحلة خارجية رتبنا لها من مدة وذلك لأن احتمال أن يكون الجو رديئا احتمال كبير، وكذلك كثيرا ما يهمل الطالب في نهاية العام جزءا من المقرر لأن احتمال أن يأتي في الامتحان احتمال صغير.

وكثيرا ما نتحدث عن احتمال ارتفاع درجة الحرارة في اليوم التالي واحتمال فوزفريق كرة قدم معين على فريق آخر. وأحيانا نجد أننا نعبر عن هذه الاحتمالات بتقدير عددي. كأن نقول أن احتمال سقوط أمطار غدا ٢٠٪ واحتمال وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن ٩٥٪ وهكذا.

وهذه التقديرات العددية للاحتمالات لا تستند إلى أساس رياضي لكن قد تعتمد على خبرات ومعلومات سابقة عن الطقس وعن تتبع لفترات طويلة وصول طائرة الخطوط البريطانية القادمة من لندن.

وقد يتبادر إلى الذهن الآن أن نبدأ بتعريف الاحتمال، ما هو، وما هى الموضوعات التي تتعلق بنظرية الاحتمالات. ولكن في الواقع ليس من السهل أن نبدأ بوضع تعريف محدد للفظ «احتمال» ولكن إذا رغبنا في ذلك فيمكننا تحديد مجال نظرية الاحتمالات بالتعريف التالي :

«نظرية الاحتمالات هى فرع من فروع الرياضة التطبيقية يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء». لهذا لابد لنا من إيضاح كلمة «صدفة ــ Chance» ــ هذه الكلمة التي تعودنا على سماعها في حياتنا اليومية ويمكن توضيح مفهومها على النحو التالي :

من المعلوم لدينا أننا إذا ألقينا قطعة من المعدن في الهواء فإنها سوف تسقط على الأرض وهذا شيء "مؤكد" لأنها حقيقة معروفة ــ ولكن إذا ألقينا قطعة من العملة على طاولة مسطحة فإن القطعة سوف تسقط على سطح الطاولة وسيكون أحد وجهيها إلى أعلى (مع استبعاد أن تستقر قطعة العملة على حرفها) ــ ولكننا لا نعلم أي الوجهين سيظهر إلى أعلى لأن هذا يعتمد على ما نسميه «بالصدفة».

كذلك نعرف أن الماء يتحول إلى بخار إذا سخن على النار إلى درجة حرارة ١٠٠ درجة مئوية في ظروف الضغط الجوي العادي ــ وهذا شيء مؤكد ــ ولكن عند إلقاء زهرة الطاولة على لوحة مسطحة فإن ما نعرفه هو أن أحد أوجهها الستة سيظهر إلى أعلى ولكن أي وجه من الأوجه الستة سيظهر هذا ما لا نعرفه لأن ذلك يعتمد على ما نسميه « بالصدفة » وهكذا..

مما سبق يمكننا استنباط الفرق بين لفظ « مؤكد » ولفظ « صدفة » ــ فالشيء المؤكد يعتمد على عدة ظروف معينة معروفة لدينا تماما إذا تحققت هذه الظروف حدث هذا الشيء ، فكما سبق أن قلنا إنه في ظروف الضغط الجوي العادي إذا تم تسخين الماء إلى ١٠٠ درجة مئوية فإنه يتحول إلى بخار ــ وفي هذه الحالة الظروف معروفة لنا تماما لهذا نقول إن تحول الماء إلى بخار إذا تحققت هذه الظروف يعتبر شيئا مؤكدا. ولكن في حالة قطعة العملة أو زهرة الطاولة فإن الوجه العلوي الذي يظهر بعد الإلقاء يعتمد على ظروف كثيرة بعضها معروف لنا و بعضه نجهله تماما ــ فظهور وجه معين يعتمد على طريقة الإلقاء وقوته ونقطة الاصطدام الأولى بالطاولة وغير ذلك من الحقائق التي نجهلها تماما والتي تتسبب في ظهور ذلك الوجه دون الآخر. من هذه الأمثلة يمكن أن نفرق بين لفظي « مؤكد » و« صدفة » فالأول يدل على شيء معلوم لدينا كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه أما الثاني فانما يدل على شيء غير معلوم لدينا تماما كل ما يؤدي إلى حدوثه من ظروف.

(١ــ٢) ــ مفهوم الاحتمال :

إن لفظ صدفة الذي عرفناه في البند السابق وثيق الصلة بلفظ احتمال « Probability » وكلمة « احتمال » هي كلمة شائعة في لغتنا اليومية ودائما نستعملها عندما نتكلم عن شيء يتحكم في حدوثه عوامل الصدفة. فمثلا عندما نقول « يحتمل أن تمطر السماء اليوم » نقول هذه العبارة إذا كانت السماء ملبدة بالغيوم وكان الجومائلا إلى البرودة لأن هذه « بعض الظروف » التي تؤدي إلى سقوط المطر وليست بالطبع هي كل الظروف وإلا لكان من المؤكد سقوط المطر ولكن يوجد بها بالإضافة إلى هذه الظروف عدة ظروف أخرى لا نعرفها تماما إذا توفرت كلها سقط المطر أما إذا لم تتوافر كلها فلن تسقط أمطار.

كذلك يمكن النظر إلى الاحتمالات على أنها أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية. وتسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة أي لا نستطيع التنبؤ بها.

فمثلا ، إذا ألقيت قطعة معدنية من النقود فإننا لا نستطيع أن نتنبأ إذا كان السطح العلوي لها سيظهر صورة أو كتابة ، إذاً فهذه محاولة أو تجربة عشوائية. كذلك عند سحب ورقة عشوائيا من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) فإننا لا نعلم إذا كانت الورقة المسحوبة ستظهر صورة أو عددا ، إذاً فهي محاولة عشوائية. كذلك إذا كانت هناك حالة ولادة فلا نستطيع التنبؤ عما إذا كان المولود ذكرا أو أنثى. إذاً فهذه تجربة عشوائية.

وعلى العموم فإن نتائج التجارب تنقسم إلى ثلاثة أنواع من وجهة نظر الاحتمالات هي كما يلي :

(أ) نتائج أو حوادث مؤكدة :

وهي نتائج لابد من وقوعها أو حدوثها.

مثال (١) : إذا ألقيت تفاحة في الهواء فإننا نعلم أنها لابد وأن تسقط على الأرض. هنا التجربة هى إلقاء التفاحة في الهواء، والنتيجة هى سقوط التفاحة على الأرض.

مثال (٢) : إذا كان لدينا صندوق به ٨ كرات بيضاء اللون، سحبت منه كرة واحدة فلابد أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

هنا التجربة هى سحب كرة من الصندوق، والنتيجة أن الكرة بيضاء : إذا فهذه نتيجة مؤكدة.

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإنه يقال إن احتمال وقوعها يساوي واحد.

أي أن احتمال سقوط التفاحة (في المثال ١) = ١

وكذلك احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء في (المثال ٢) = ١

(ب) نتائج أو حوادث مستحيلة :

وهى تلك النتائج أو الحوادث المستحيل وقوعها.

مثال (٣) : هل يمكن سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء ؟

التجربة هنا هي سحب كرة من الصندوق، والنتيجة المطلوبة أن تكون الكرة حمراء، إذاً فهذه حادثة مستحيلة.

مثال (٤) : أن يعيش شخص ما إلى الأبد. هذه حادثة مستحيلة. وإذا كانت الحادثة مستحيلة الوقوع فإنه يقال أن احتمال وقوعها يساوي صفر.

أي أن احتمال سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوى إلا على كرات بيضاء (في المثال ٣) = صفر.

وكذلك احتمال أن يعيش شخص ما إلى الأبد (في المثال ٤) = صفر.

(جـ) حوادث أو نتائج غير مؤكدة (محتملة أو ممكنة) :

وهى نتائج التجارب العشوائية التي ذكرناها سابقا والتي لا نستطيع أن نتنبأ بوقوعها، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها.

ولفظ احتمال يعبر عن مدى توقعنا لحدوث شيء معين وهذا التوقع أو التنبؤ أو التخمين قد يكون كبيرا وقد يكون صغيرا وتبعا لذلك قد يكون الاحتمال كبيرا وقد يكون صغيرا، وهذا يبعث لدينا الرغبة في إجراء المقارنة بين احتمالي حدوث حادثتين لمعرفة أيهما أكبر احتمالا وذلك كما يتضح مما يلي:

لو كان لدينا صندوقان بهما كرات متشابهة في الحجم والوزن وكل شيء ما عدا اللون، وكان الصندوق الأول به ٩٠ كرة بيضاء و١٠ كرات سوداء والصندوق الثاني به ١٠ كرات بيضاء و٩٠ كرة سوداء ونريد الإجابة عن السؤال التالي: عند سحب كرة واحدة عشوائيا من كل صندوق أيهما أكثر احتمالا، الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أم الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني؟

بالتفكير العقلي البسيط يمكننا الحكم بأن احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الأول أكبر من احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني وذلك لكبر نسبة الكرات البيضاء في الصندوق الأول عنها في الثاني.

هذا يوضح أن كل ما نعرفه حتى الآن هو مجرد مقارنة الاحتمالات ولكن لم نحدد قيمة الاحتمال بطريقة عددية، هذا مما دفع العلماء الأوائل في هذا المجال إلى وضع تعريف نتمكن به من قياس الاحتمال بتحديد قيمته العددية.

(١ـ٣) ـ فكرة سريعة عن نشأة نظرية الاحتمالات:

لقد ظهرت نظرية الاحتمالات في القرن السابع عشر ونالت اهتمام الكثير من علماء الرياضة أمثال «بسكال ـ Pascal» (١٦٢٣ ـ ١٦٦٢) و«فرمات ـ Fermat» (١٦٠١ ـ ١٦٦٥) حيث دخل هذان العالمان الكبيران في عملية مناظرة عظيمة أثرت هذا الفرع من العلوم ودخلت به في مجال الدراسة العلمية المنظمة وذلك عندما تقدم أحد نبلاء فرنسا و يدعى «تشيفلييه ـ de Méré Chevalier» وكان يعمل في مجال المضاربة والمقامرة وطلب من بسكال أن يحسب له احتمال بعض الحالات التي تواجهه في أعماله فقام بسكال بحساب الاحتمالات المطلوبة ثم تعدى ذلك إلى عدة حالات أخرى ثم اهتم بهذه الحالات وغيرها كنوع من الدراسة وقام بوضع أسس وقواعد تخدم هذه الدراسة.

وقد أكمل «برنوللي ـ Bernoulli» (١٦٤٥ ـ ١٧٠٥) المسيرة وبعده «لابلاس ـ Laplace» (١٧٤٩ ـ ١٨٢٧) ـ ونتج عن أعمال «برنوللي» وضع تعريف للاحتمال وإن كانت صياغة هذا التعريف قد أتت على يد «لابلاس» ـ وقبل تقديم هذا التعريف سنعرض بعض القواعد والأسس والتعريفات التي تعتبر نتاجا لما قام به هؤلاء الرواد الأوائل من دراسات علمية منتظمة في مجال الاحتمالات.

(أ) الحالات المتماثلة (Eaqually Likely Cases) :

هى تلك الحالات التي يكون لها فرص متكافئة من حيث الحدوث ــ أي لها نفس الفرصة.

فمثلا لو كان لدينا صندوق به ١٠٠ كرة متشابهة في كل شيء عدا اللون منها ٥٠ كرة بيضاء، ٥٠ كرة سوداء ــ ورغبنا في سحب كرة من هذا الصندوق عشوائيا سنجد أن فرصة ظهور اللون الأبيض تعادل تماما فرصة ظهور اللون الأسود وذلك بسبب تساوي أعداد الكرات من كل من اللونين و يعتبر اللونان في هذه الحالة حالتين متماثلتين. كذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية متزنة ومصنوعة من معدن متجانس وكانت عملية الإلقاء غير متحيزة فإن فرصة ظهور الصورة تعادل تماما فرصة ظهور الكتابة و بهذا يمكن القول أن هاتين الحالتين (الصورة والكتابة) متماثلتين.

(ب) الحوادث الشاملة (Exhaustive Events) :

يقال أن الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، .... ، $أ_ن$ تشكل مجموعة من الحوادث الشاملة في تجربة معينة إذا كان لابد أن يتحقق واحد منها على الأقل عند إجراء التجربة ولا توجد نتيجة أخرى للتجربة تختلف عن هذه الحوادث.

مثال ذلك عند إلقاء زهرة الطاولة فإن الأوجه الستة للزهرة (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) تعتبر أحداثا شاملة ــ كذلك عند إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهات (صورة، كتابة) حدثين شاملين.

(جـ) الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events) :

يقال إن الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، .... ، $أ_ن$ حوادث متنافية إذا استحال جدوى أي اثنين (أو أكثر) منها في آن واحد.

فمثلا في تجربة إلقاء زهرة الطاولة تعتبر الأوجه الستة حوادث متنافية لعدم إمكان حدوث أي اثنين منها في آن واحد وكذلك في تجربة إلقاء قطعة العملة يعتبر الوجهان (صورة، كتابة) حدثين متنافيين.

ملحوظة (١) :

من التعريف السابق في (أ) للحوادث المؤكدة وكذلك الحوادث المستحيلة في (ب) يبدو واضحا لنا معنى كلمة «حدث» وكذلك كلمة «تجربة» ــ مما يجعلنا لا نحتاج لوضع تعريف مستقل لكل منهما.

الحالات الممكنة (Possible Cases) :

هى مجموعة النتائج (أو الحالات) التي يمكن أن تنتج عند إجراء التجربة.

فلوكانت التجربة هى إلقاء زهرة الطاولة مرة واحدة فإن الأوجه الستة للزهرة تعتبر هى الحالات الممكنة لهذه التجربة. كذلك إذا كانت التجربة هى سحب كرة واحدة من كيس يحتوي على عشرة كرات متماثلة فإن الحالات الممكنة تعتبر عشرة حالات متماثلة. وهكذا.

(هـ) الحالات المواتية (Favorable Cases) :

هى مجموعة النتاجة التي تؤدي إلى تحقيق الحدث ــ وهى جزء من الحالات الممكنة للتجربة.

(١ــ٤) ــ تعريف الاحتمالات :

يوجد للاحتمالات عدة تعاريف مختلفة نذكر منها تعريفين اثنين فقط واللذين لا يحتاجان إلى مفهوم رياضي متقدم هما :

أولا : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات.
ثانيا : التعريف التجريبي للاحتمالات.

أولا : التعريف الكلاسيكي للاحتمالات :

إذا كنا بصدد إجراء تجربة ما مجموعة النتائج التي يمكن أن تنتج عنها عددها ن من الحالات الشاملة المتنافية المتماثلة وكان م من هذه الحالات موات للحدث أ فإن احتمال وقوع الحدث أ يعرف بأنه النسبة $\frac{م}{ن}$.

فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحدث أ بالرمزح (أ) فيمكن كتابة هذا الاحتمال في الصورة التالية :

ح (أ) = عدد الحالات المواتية للحدث أ \ عدد الحالات الممكنة للتجربة.

فمثلا عند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب المحكمة الخلط (الكوتشينة) نجد أن لدينا ٥٢ حالة متنافية ومتماثلة هى الحالات الممكنة للتجربة، فاذا كان الحدث أ هو الحصول على صورة يكون أمامنا ١٢ حالة مواتية لوقوع الحدث أ وهى عدد الصور في الكوتشينة وعلى هذا يكون احتمال وقوع الحدث أ مساو يا $\frac{١٢}{٥٢}$، وتكتب في صورة رمزية كما يلي :

$$ح(أ) = \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣} .$$

كذلك إذا كانت التجربة هى إلقاء زهرة نرد متزنة تكون الحالات الممكنة لهذه التجربة ٦ حالات شاملة ومتنافية ومتماثلة. فإذا كان الحدث هو الحصول على عدد زوجي من النقط فإن

الحالات المواتية لهذا الحدث هى ٣ حالات (٢ ــ ٤ ــ ٦) وهى الأ وجه التي تحمل عددا زوجيا من النقط و بهذا يكون احتمال وقوع هذا الحدث مساو يا $\frac{٣}{٦}$ ــ وتكتب: ح (أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ وهكذا.

مثال (٥) : عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة ــ ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لها أكثر من ٤ ؟

التجر بة : هى إلقاء زهرة النرد.

∴ الحالات الممكنة هى: ن = ٦ حالات متماثلة.

الحدث أ هو: أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي للزهرة أكبر من ٤.

∴ الحالات المواتية هى: م = ٢ (وهى الحالتين ٥ ، ٦).

∴ ح (أ) = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$.

مثال (٦) : عند إلقاء قطعتي عملة مرة واحدة (أو إلقاء قطعة واحدة مرتين متتاليتين) ما هو احتمال الحصول على صورتين ؟

الحل

التجر بة هى : إلقاء قطعتي عملة.

الحالات الممكنة هى : ــ ن = ٢ × ٢ = ٤ حالات

وذلك لأن القطعة الأ ولى لها وجهان كل وجه منهما يمكن أن يناظره وجهان للقطعة الثانية. وهذه الحالات الأ ربع يمكن حصرها لورمزنا للصورة بالرمز ص والكتابة بالرمز ك كما يلي:

ص ص ــ ص ك ــ ك ص ــ ك ك .

الحدث أ هو: الحصول على صورتين.

∴ الحالات المواتية هى : حالة واحدة وهى (ص ص).

∴ ح (أ) = $\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$ = $\frac{١}{٤}$

مثال (٧) : عند إلقاء زهرتين متزنتين من زهرات النرد مرة واحدة (أو إلقاء زهرة واحدة مرتين) ما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطحين العلو يين:

: مساو يا ٩؟ : ٩ فأكثر؟

الحل

التجر بة : إلقاء زهرتي نرد متزنتين.

ن = ٣٦ حالة متماثلة (٦ حالات للزهرة الأ ولى كل حالة منها يقابلها ٦ حالات للزهرة الثانية و بذا يكون عدد الحالات الممكنة مساو يا ٦ × ٦ = ٣٦ حالة).

ويمكن حصر الحالات الممكنة في الشكل التالي :

نرمز للزهرة الأولى بالرمز س والثانية بالرمز ص

س \ ص	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(٢،١)	(٣،١)	(٤،١)	(٥،١)	(٦،١)
٢	(١،٢)	(٢،٢)	(٣،٢)	(٤،٢)	(٥،٢)	(٦،٢)
٣	(١،٣)	(٢،٣)	(٣،٣)	(٤،٣)	(٥،٣)	(٦،٣)
٤	(١،٤)	(٢،٤)	(٣،٤)	(٤،٤)	(٥،٤)	(٦،٤)
٥	(١،٥)	(٢،٥)	(٣،٥)	(٤،٥)	(٥،٥)	(٦،٥)
٦	(١،٦)	(٢،٦)	(٣،٦)	(٤،٦)	(٥،٦)	(٦،٦)

الحالات السابقة تمثل ٣٦ نتيجة ــ فمثلا النتيجة (٥ ، ٢) معناها أن الزهرة الأولى نتيجتها الوجه الذي عليه ٥ فقط والزهرة الثانية الوجه الذي عليه نقطتين .

: الحدث $أ_١$: هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ .

∴ الحالات المواتية $م_١$: هى تلك الحالات التي تبدو بين الخطين المائلين في الجدول السابق وعددها ٤ حالات .

أي أن $م_١ = ٤$

$$∴ ح(أ_١) = \frac{م_١}{ن} = \frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$$

: الحدث $أ_٢$: هو أن يكون مجموع النقط على السطحين العلويين ٩ فأكثر.

الحالات المواتية $م_٢$: هى تلك الحالات الموجودة بين الخطين المائلين في الجدول السابق بالإضافة إلى كل الحالات الموجودة أسفل هذين الخطين لأن كلها تحقق الحدث المطلوب $أ_٢$ أي أن مجموع كل منها إما ٩ أو أكثر من ٩ وعددها ١٠ حالات متماثلة ــ أي أن :

$م_٢ = ١٠$

$$∴ ح(أ_٢) = \frac{م_٢}{ن} = \frac{١٠}{٣٦} = \frac{٥}{١٨}$$

(١ ــ ٤ ــ ١) المبادىء الأولية للاحتمالات

مما سبق نستنتج ما يلي :

(i) صفر $\geq$ ح (أ) $\geq$ ١

(ii) ح (أ) = صفر إذا كانت أ حادثة مستحيلة

(iii) ح (أ) = ١ إذا كانت أ حادثة مؤكدة .

(iv) إذا كان احتمال وقوع الحادثة أ هو ح وكان احتمال عدم وقوعها هو ل فإن

ح + ل = ١

أي أن احتمال وقوع أي حادثة + احتمال عدم وقوعها = ١

وذلك لأنه من المؤكد أن تقع الحادثة أو لا تقع .

(١ــ٤ــ٢) ــ بعض قوانين الاختيار الهامة :

لإمكان حل مسائل الاحتمالات فإننا سنعتمد على بعض قوانين موضوع الاختيار ونذكر منها على الأخص :

(أ) عدد الطرق التي يمكن بها اختيار س من الأشياء من بين ن من هذه الأشياء

$$= {}^{ن}ق_{س} = \frac{ن!}{س!\,(ن - س)!}$$

حيث أن :

$$ن! = ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢) \times \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \times ٢ \times ١$$

فمثلا : $٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

مثال (٨) : إذا كان لدينا ٤ رجال وأريد إرسال بعثة منهم مكونة من رجلين . فإنه يمكن اختيار أعضاء هذه البعثة بعدد من الطرق مساو يا ${}^{٤}ق_{٢}$ طريقة .

حيث $${}^{٤}ق_{٢} = \frac{٤!}{٢!\,(٤ - ٢)!} = \frac{٤!}{٢! \times ٢!}$$

$$= \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢ \times ١ \times ٢ \times ١} = ٦ \text{ طرق .}$$

مثال (٩) : صندوق به ٨ كرات متماثلة . سحبت منه ٣ كرات ، فما هي عدد الطرق التي يمكن بها إجراء هذه العملية .

الحل

عدد الطرق = $${}^{٨}ق_{٣} = \frac{٨!}{٣! \times ٥!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٣ \times ٢ \times ١ \times ٥!} = ٥٦ \text{ طريقة .}$$

(ب) إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق مختلفة عددها ل وأمكن إجراء عملية أخرى بطرق مختلفة عددها م ، فإن عدد الطرق التي يمكن بها إجراء العمليتين معا هو ل م .

مثال (١٠) : ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تكوين بعثة من ٣ رجال ، ٢ نساء من بين ٦ رجال ، ٥ نساء .

الحل

عدد طرق اختيار الرجال = $^{٦}ق_{٣} = \frac{٦!}{٣! \times ٣!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} =$ **٢٠ طريقة** .

عدد طرق اختيار النساء = $^{٥}ق_{٢} = \frac{٥!}{٢! \times ٣!} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} =$ **١٠ طرق**

عدد طرق تكوين البعثة = ٢٠ × ١٠ = ٢٠٠ طريقة .

(١ـ٤ـ٣) ـ أمثلة على الاحتمالات :

مثال (١١) : صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٤ حمراء . سحبت منه كرة واحدة . فما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

(I) بيضاء ؟ (II) حمراء ؟

الحل

ـ عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة من الصندوق

$= {}^{٩}ق_{١} = \frac{٩!}{١! \times ٨!} =$ **٩ طرق** .

ـ عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$= {}^{٥}ق_{١} = \frac{٥!}{١! \times ٤!} =$ **٥ طرق**

ـ عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$= {}^{٤}ق_{١} = \frac{٤!}{١! \times ٣!} =$ **٤ طرق**

∴ (I) احتمال سحب كرة بيضاء $= \frac{٥}{٩}$

، (II) احتمال سحب كرة حمراء $= \frac{٤}{٩}$

ونلاحظ في هذا المثال أن مجموع الاحتمالات في (I) ، (II) يساوي الواحد الصحيح لأن الكرة المسحوبة إما أن تكون بيضاء أو حمراء وهذه حادثة مؤكدة .

مثال (١٢) : صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٤ حمراء ، سحبت منه كرتان فما هو احتمال أن تكون الكرتان :

(I) بيضاء ؟ (II) واحدة بيضاء والأخرى حمراء ؟

الحل

(I) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتان من الصندوق

$$= {}^{٩}ق_{٢} = \frac{٩ !}{٢ ! \times ٧ !} = ٣٦ \text{ طريقة .}$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرتين بيضاء من الصندوق

$$= {}^{٥}ق_{٢} = \frac{٥ !}{٢ ! \times ٣ !} = ١٠ \text{ طرق .}$$

∴ احتمال أن تكون الكرتان بيضاء $= \frac{١٠}{٣٦}$

(II) عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء من الصندوق

$$= {}^{٥}ق_{١} = ٥ \text{ طرق}$$

، عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة حمراء من الصندوق

$$= {}^{٤}ق_{١} = ٤ \text{ طرق}$$

∴ عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة بيضاء وكرة حمراء من الصندوق

$$= ٥ \times ٤ = ٢٠ \text{ طريقة .}$$

∴ احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء $= \frac{٢٠}{٣٦}$

مثال (١٣) : ألقيت زهرة نرد مرة واحدة . فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي لها : (I) أقل من ٣ ؟ (II) ٤ فأكثر ؟

(I) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي = ٦

، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح رقم أقل من ٣

= ٢ (وهما ظهور الوجه ١ أو الوجه ٢)

∴ احتمال (الحصول على عدد أقل من ٣) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(II) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي ٤ فأكثر = ٣ (وهى الوجه ٤ أو الوجه ٥ أو الوجه ٦)

∴ احتمال الحصول على ٤ فأكثر = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال (١٤) : ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة ، فما هو احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لهما ٥ .

الحل

عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الأ ولى = ٦ طرق

، عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرة الثانية = ٦ طرق

عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها السطح العلوي للزهرتين معا = ٦ × ٦ = ٣٦ طريقة

عدد الطرق التي يمكن أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي ٥ هو = ٤ طرق

وهى (١ ، ٤) أو (٢ ، ٣) أو (٣ ، ٢) أو (٤ ، ١)

∴ احتمال (أن يكون المجموع ٥) = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

ثانيا : التعريف التجريبي للاحتمالات :

يتضح من التعريف الكلاسيكي للاحتمال أنه يعتمد على عدة فروض أساسية ــ منها افتراض أن الحالات الممكنة كلها حالات متماثلة ــ وهذا الفرض يترتب عليه أن الحالات الممكنة كلها تكون متساو ية الاحتمالات ، فلو كان عددها ن حالة مثلا (وهى طبعا متنافية) سيكون احتمال كل منها $\frac{١}{ن}$ ، ولكن هذا الفرض ليس دائما متوفرا في كل ما نصادفه من تجارب وظواهر طبيعية . فمثلا إذا حاولنا معرفة احتمال أن يكون المولود ذكرا في ولادة معينة وذلك باستخدام التعريف الكلاسيكي للاحتمال ــ سنجد أن الحالات الممكنة حالتان فقط (ذكر وأنثى) وهما ليسا متماثلتين لأنه من المعروف إحصائيا في كل زمان ومكان أن نسبة المواليد الذكور أكبر من نسبة المواليد الإناث (٥١ : ٤٩ تقريبا) و بالتالي تكون فرصة أن يكون المولود ذكرا أكبر من فرصة أن يكون أنثى و بالتالي لا يمكن حساب مثل هذا الاحتمال باستخدام التعريف الكلاسيكي لأنه يوصلنا إلى نتيجة مضللة لأنه يعتبر الحالات الممكنة ن = ٢ والحالات المواتية م = ١ حالة واحدة

(ذكر) و يكون الاحتمال = $\frac{1}{2}$ وهذا خطأ واضح. كذلك لو تصورنا وجود قطعة عملة غير متزنة (أحد وجهيها أثقل من الوجه الآخر) و بالتالي فرصة ظهور أحد الوجهين أكبر من فرصة ظهور الوجه الآخر فكيف نجد احتمال الحصول على الصورة واحتمال الحصول على الكتابة في هذه الحالة ـ من البديهي أنه لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي الذي يوصلنا إلى احتمال الحصول على الصورة يساوي تماما الحصول على كتابة يساوى $\frac{1}{2}$ ـ مثل هذه الملاحظات أدت إلى توجيه عدة انتقادات شديدة للتعريف الكلاسيكي الذي يكون قاصرا عن حساب الاحتمال في بعض الحالات مثل التي أوضحناها الآن ـ لذلك فإن التعريف الكلاسيكي يعتبر تعريفاً غير شامل ولا ينطبق إلا في حدود ضيقة جدا هى مجال ألعاب الصدفة مما دفع علماء الرياضة المهتمين بهذه الدراسة إلى وضع تعريف شامل يعتمد على التجربة والملاحظة وحصر الحالات التي يتحقق فيها الحدث المرغوب حساب احتماله وهذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي للاحتمال ويمكن صياغة هذا التعريف كما يلي:

التعريف التجريبي للاحتمال:

إذا كررنا تجربة معينة مرات عددها ن (تحت نفس الظروف) ولاحظنا أن حادثا معينا أ قد تحقق في م من هذه المرات فإن النسبة $\frac{م}{ن}$ تسمى بالتكرار النسبي للحدث أو تعتبر قيمة تجريبية لاحتمال وقوع هذا الحدث وتقترب هذه القيمة التقريبية من احتمال وقوع الحدث أ كلما كبرت ن حتى أنه عندما تصبح ن كبيرة كبرا لا نهائيا تصبح هذه القيمة التقريبية هى احتمال وقوع الحدث أ. و يكون:

احتمال وقوع الحدث أ هوح (أ) = $\frac{م}{ن}$ عندما تكبر ن كبرا لا نهائيا.

وعادة نرمز إلى ذلك رياضيا بالصيغة التالية:

$$ح\ (أ) = \underset{ن \rightarrow \infty}{نـهـا}\ \frac{م}{ن}$$

(حيث أن نها هى اختصار لكلمة نهاية ـ و يكون معنى الرمز السابق أنه في النهاية عندما تكبر ن كبرا لا نهائيا يكون الاحتمال ح (أ) = $\frac{م}{ن}$).

هذا التعريف يقوم على أساس ملاحظة الظاهرة موضوع الدراسة عدد كبير من المرات ـ فمن المعلوم أن أي ظاهرة طبيعية مثل المواليد والوفيات وغير ذلك من الظواهر تخضع لصفة نظامية محددة ـ وهذه قدرة الخالق المبدع سبحانه وتعالى خلق كل شيء بقدر ـ هذه الصفة النظامية لا تظهر في الحالات القليلة العدد ولكنها تظهر بوضوح في الحالات الكبيرة العدد. كما أن هذا التعريف يسمى بالتعريف التجريبي لأنه يعتمد على ملاحظة التجربة ـ كما أنه يسمى أحيانا بالتعريف البعدي

لأن الاحتمال يتم حسابه بعد إجراء التجربة عدد كبير من المرات وهذا يختلف عن التعريف الكلاسيكي الذي يمكن استخدامه في حساب الاحتمال قبل إجراء التجربة.

مثال (١٥) : لدينا قطعة عملة معروف أنها غير متزنة ــ تم إلقاؤها ألف مرة فظهرت الصورة ٥٥٠ مرة والكتابة ٤٥٠ مرة. فما هو احتمال الحصول على الصورة عند إلقاء هذه القطعة؟

الحل

بما أن الصورة ظهرت ٥٥٠ مرة من بين ألف مرة ــ إذن نسبة ظهور الصورة $= \frac{550}{1000} =$ ٥٥ر٠ وهذه النسبة يمكن اعتبارها تقريبا إحتمال الحصول على الصورة و بالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

ح = ٥٥ر٠

مثال (١٦) : أجرى طبيب ٥٠٠ عملية جراحية ونجح منها ٤٨٠ عملية فما احتمال نجاح عملية يجريها هذا الطبيب؟

الحل

عدد مرات إجراء العملية ن = ٥٠٠

عدمرات نجاح العملية م = ٤٨٠

احتمال نجاح العملية $= \frac{480}{500} =$ ٩٦ر٠

مثال (١٧) : في مصنع للمصابيح الكهربية تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح يوجد ٥٠ مصباحا غير صالح للاستعمال. فما هو احتمال وجود مصباح جيد؟

الحل

عدد المصابيح ن = ١٠٠٠ مصباح

عدد المصابيح الجيدة م = ٩٥٠ مصباحا

∴ الاحتمال المطلوب $= \frac{م}{ن} = \frac{950}{1000} =$ ٩٥ ر٠

(١ــ٤ــ٤) ــ بعض المصطلحات :

إذا كانت أ ترمز إلى وقوع حدث معين وليكن (أ)

، كانت ب ترمز إلى وقوع حدث معين آخر وليكن (ب)

فإن :

أ ترمز إلى عدم وقوع الحدث أ

ب ترمز إلى عدم وقوع الحدث ب

(أ و ب) ترمز إلى وقوع الحدثين أ، ب معا

(أ أو ب) ترمز إلى وقوع الحدث أ أو الحدث ب أو كلاهما معا .

(أ | ب) ترمز إلى وقوع الحدث أ علما بأن الحدث ب قد وقع فعلا .

(١ـ٤ـ٥) ـ بعض التعاريف :

(١) يقال إن الحدثين أ، ب مانعان أو متنافيان أو متعارضان، إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر.

(٢) يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث الآخر.

(١ـ٥) ـ بعض قوانين الاحتمالات :

(أ) حالة الحوادث المعانة (المتنافية) :

إذا كان أ ، ب حادثين مانعين (متنافيين) فإن :

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

مثال (١٨) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب. فما هو احتمال أن تحمل الرقم ثلاثة أو صورة ؟

الحل

نفرض أن أ ـ الورقة المسحوبة ثلاثة

ب ـ الورقة المسحوبة صورة

∴ أ ، ب حادثان مانعان

∴ ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$= \frac{٤}{٥٢} + \frac{١٢}{٥٢} = \frac{١٦}{٥٢} = \frac{٤}{١٣}$$

ملحوظة (٢):

يمكن تعميم القاعدة السابقة. فإذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ...... ، $أ_ن$ هي ن حادثة مانعة

فان: $ح\ (أ_١ \text{ أو } أ_٢ \text{ أو } أ_٣ \text{ ، .... أو } أ_ن)$

$$= ح(أ_١) + ح(أ_٢) + ح(أ_٣) + ... + ح(أ_ن)$$

مثال (١٩) : سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب. فما هو احتمال أن تكون الورقة تحمل الرقم ثلاثة أو ثمانية أو صورة؟

الحل

نفرض أن $أ_١$ ــ الورقة المسحوبة ثلاثة

$أ_٢$ ــ الورقة المسحوبة ثمانية

$أ_٣$ ــ الورقة المسحوبة صورة

وهذه حوادث مانعة.

$$\therefore \quad ح\,(أ_١ \text{ أو } أ_٢ \text{ أو } أ_٣) = ح\,(أ_١) + ح\,(أ_٢) + ح\,(أ_٣)$$

$$= \frac{٤}{٥٢} + \frac{٤}{٥٢} + \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٢٠}{٥٢} = \frac{٥}{١٣}$$

(ب) حالة الحوادث غير المانعة :

إذا كان أ ، ب حادثتين غير مانعتين فإن :

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) ــ ح (أ و ب)

مثال (٢٠) : ألقيت زهرة نرد مرة واحدة. فما هو احتمال أن يكون السطح العلوي يقبل القسمة على ٢ أو ٣؟

الحل

نفرض أن أ ــ السطح العلوي يقبل القسمة على ٢

ب ــ السطح العلوي يقبل القسمة على ٣

أ ، ب حادثان غير مانعين

$$\therefore \quad ح\,(أ \text{ أو } ب) = ح\,(أ) + ح\,(ب) - ح\,(أ \text{ و } ب)$$

$$= \frac{٣}{٦} + \frac{٢}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٢١) : في المثال السابق (رقم ٢٠) احسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من ٢.

الحل

نفرض أن أ ــ العدد الزوجي

ب ــ العدد أكبر من ٢

أ ، ب ـــ حادثتان غير مانعين .

∴ ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) ـــ ح (أ و ب)

$$= \frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٦} - \frac{٢}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

(جـ) حالة الحوادث غير المستقلة :

إذا كانت أ ، ب حادثتين غير مستقلتين فإن :

ح (أ و ب) = ح (أ) . ح (ب / أ)

= ح (ب) . ح (أ / ب)

حيث ح (ب / أ) يسمى الاحتمال الشرطي ، أي احتمال وقوع الحادث ب بشرط أن الحادث أ يكون قد وقع فعلا .

مثال (٢٢) : صندوق به ٥ كرات بيضاء ، ٣ كرات حمراء ، سحبت منه عشوائيا كرتان على التوالي (أي بدون إرجاع الكرة الأولى) . فما هو احتمال أن تكون الكرتان بيضاء ؟

الحل

نفرض أن أ ـــ الكرة الأولى بيضاء .

ب ـــ الكرة الثانية بيضاء

أ ، ب حادثتان غير مستقلتين وذلك لأن احتمال سحب كرة بيضاء في المرة الثانية يعتمد على لون الكرة الأولى .

∴ ح (أ و ب) = ح (أ) . ح (ب / أ)

$$= \frac{٥}{٨} \cdot \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

مثال (٢٣) : في المثال السابق (رقم ٢٢) احسب احتمال أن تكون الكرتان واحدة بيضاء والأخرى حمراء .

الحل

نفرض أن أ ـــ الكرة بيضاء

ب ـــ الكرة حمراء

١ ـــ رمز الأولى

٢ ـــ رمز الثانية

$$(أ \text{ و } ب) = \text{اما } (أ_{١} \text{ و } ب_{٢}) \text{ أو } (ب_{١} \text{ و } أ_{٢})$$

$$\therefore ح(أ \text{ و } ب) = ح(أ_{١} \text{ و } ب_{٢}) + ح(ب_{١} \text{ و } أ_{٢})$$

$$= ح(أ_{١})\ ح(ب_{٢} | أ_{١}) + ح(ب_{١})\ ح(أ_{٢} | ب_{١})$$

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} = \frac{١٥}{٢٨}$$

ملحوظة :

اذا كان $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، .. .. .. ، $أ_{ن}$ هي ن حادثة غير مستقلة فان

$$ح(أ_{١} \text{ و } أ_{٢} \text{ و } أ_{٣} \text{ و } .. .. \text{ و } أ_{ن}) = ح(أ_{١}) \times ح(أ_{٢} | أ_{١})$$

$$\times ح(أ_{٣} | أ_{١} ، أ_{٢}) \times .... \times ح(أ_{ن} | أ_{١} ، أ_{٢} ، .... ، أ_{ن-١})$$

مثال (٢٤) : صندوق به ٥ كرات بيضاء، ٤ حمراء سحبت منه على التوالي ٣ كرات فما هو احتمال أن تكون جميعها بيضاء؟

الحل

$أ_{١}$ ــ الكرة الأولى بيضاء

$أ_{٢}$ ــ الكرة الثانية بيضاء

$أ_{٣}$ ــ الكرة الثالثة بيضاء

هذه الحوادث الثلاث غير مستقلة :

$$\therefore ح(أ_{١} \text{ و } أ_{٢} \text{ و } أ_{٣}) = ح(أ_{١}) \times ح(أ_{٢} | أ_{١}) \times ح(أ_{٣} | أ_{١} ، أ_{٢})$$

$$= \frac{٥}{٩} \times \frac{٤}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٥}{٤٢}$$

(د) حالة الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ ، ب حادثتين مستقلتين فإن :

$$ح(أ \text{ و } ب) = ح(أ) . ح(ب)$$

$$= ح(ب) . ح(أ)$$

مثال (٢٥) : إذا كان احتمال أن يموت شخص أ خلال ٨ سنوات هو ٣ر٠ ، واحتمال أن يموت شخص آخر ب خلال نفس المدة هي ١٥ر٠ احسب احتمال أن يكون أ، ب قد ماتا خلال هذه المدة.

الحل

نفرض أن أ = موت الشخص أ خلال ٨ سنوات

ب = موت الشخص ب خلال ٨ سنوات

أ ، ب حادثتان مستقلتان.

∴ ح (أ و ب) = ح (أ). (ب)

= ٢ر٠ × ١٥ر٠ = ٠٣ر٠

ملحوظة (٣):

اذا كان $آ_١$ ، $آ_٢$ ، $آ_٣$ ، ... .. ، $آ_ن$ هي ن حادثة مستقلة . فإن

ح ($آ_١$ و $آ_٢$ و $آ_٣$ و ... و $آ_ن$)

= ح ($آ_١$) . ح ($آ_٢$) . ($آ_٣$) ... ح ($آ_ن$)

(١ــ٦) ــ نظرية بييز:

إذا كانت $أ_١$ ،$أ_٢$ ، ... ،$أ_ن$ هي ن حادثة مانعة وشاملة وكان هناك حادثة أخرى ب لا تقع إلا مع إحدى حالات أ (أي أن ب تقع إذا وقعت واحدة من هذه الحوادث المانعة) فإن:

$$ح\ (آ_و \mid ب) = \frac{ح\ (آ_و)\ .\ ح\ (ب \mid آ_و)}{\sum_ر ح\ (آ_ر)\ .\ ح\ (ب \mid آ_ر)}$$

البرهان

حيث أن أ ١ ، أ ٢ ، ... ، أ ن حوادث مانعة وحيث أن ظهور إحداها ينتج عنه ظهور حادثة أخرى ب فإن: ب = ($آ_١$ و ب) أو ($آ_٢$ و ب) أو .... أو ($آ_ن$ و ب)

و يكون

ح (ب) = ح ($آ_١$ و ب) + ح ($آ_٢$ و ب) + ... + ح ($آ_ن$ و ب)

$= \sum_ر$ ح ($آ_ر$ و ب)

$= \sum_ر$ ح ($آ_ر$) . ح (ب | $آ_ر$)

وحيث أن: $ح(أ_و \cap ب) = ح(أ_و) \cdot ح(ب | أ_و)$

$= ح(ب) \cdot ح(أ_و | ب)$

فان: $ح(أ_و | ب) = \frac{ح(أ_و) \cdot ح(ب | أ_و)}{ح(ب)}$

$\therefore ح(أ_و | ب) = \frac{ح(أ_و) \cdot ح(ب | أ_و)}{\sum_{ر} ح(أ_ر) \cdot ح(ب | أ_ر)}$

وهو المطلوب

مثال (٢٦) : ثلاثة مصانع I ، II ، III ، لإنتاج المصابيح الكهربائية لإحدى المحلات التجارية . فإذا كانت هذه المصانع تنتج على التوالي ٢٠٪ ، ٣٥٪ ، ٤٥٪ . من المصابيح التي يبيعها المحل . وكان احتمال إنتاج مصباح تالف من المصانع I ، II ، III ، هو ١٢ر٠ ، ١٥ر٠ ، ٠٨ر٠ ، على التوالي . فإذا اشترى شخص مصباحا من هذا المحل فإحسب :

(١) احتمال أن يكون المصباح تالفا .

(٢) إذا علم أن المصباح تالف فما هو احتمال أن يكون من إنتاج المصنع II .

الحل

نفرض أن $أ_١$ المصباح من إنتاج المصنع I

$أ_٢$ المصباح من إنتاج المصنع II

$أ_٣$ المصباح من إنتاج المصنع III

ب المصباح تالف

نعلم أن:

$ح(أ_١) = ٢٠ر٠$

$ح(أ_٢) = ٣٥ر٠$

$ح(أ_٣) = ٤٥ر٠$

كما نعلم أن :

$ح(ب | أ_١) = ١٢ر٠$

$ح(ب | أ_٢) = ٠٫١٥$

$ح(ب | أ_٣) = ٠٫٠٨$

(١) حيث أن ب $= (أ_١ و ب)$ أو $(أ_٢ و ب)$ أو $(أ_٣ و ب)$

$$\therefore ح(ب) = \sum_{ر=١}^{٣} ح(أ_ر) ح(ب | أ_ر)$$

$$= (٠٫٢)(٠٫١٢) + (٠٫٣٥)(٠٫١٥) + (٠٫٤٥)(٠٫٠٨)$$

$$= ٠٫١١٢٥$$

$$(٢)\quad ح(أ_٢ | ب) = \frac{ح(أ_٢) \cdot ح(ب | أ_٢)}{ح(ب)}$$

$$= \frac{(٠٫٣٥)(٠٫١٥)}{٠٫١١٢٥} = ٠٫٤٧$$

أمثلة عامة

مثال (١) :

فصل به ٣٠ طفلا، ١٢ ولدا، ١٨ بنتا فإذا كان من بينهم ٤ أولاد، ٨ بنات متفوقين. اختير طفلا عشوائيا ليكون عريفا على الفصل. أوجد احتمال أن يكون العريف:

١ ــ ولد متفوق　　　　٢ ــ بنت متفوقة　　　　٣ ــ متفوق

٤ ــ إذا علم أن العريف متفوق فما احتمال أن يكون بنت؟

الحل

$\text{أ}_{١}$ ــ العريف الذي سيختار ولد

$\text{أ}_{٢}$ ــ العريف الذي سيختار بنت

ب ــ العريف الذي سيختار متفوق

(١) احتمال أن يكون العريف ولدا متفوقا $= \text{ح}(\text{أ}_{١} \text{ و } \text{ب})$

$$= \text{ح}(\text{أ}_{١}) \cdot \text{ح}(\text{ب} \mid \text{أ}_{١})$$

$$= \frac{١٢}{٣٠} \cdot \frac{٤}{١٢} = \frac{٤}{٣٠}$$

(٢) احتمال أن يكون العريف بنتا متفوقة $= \text{ح}(\text{أ}_{٢} \text{ و } \text{ب})$

$$= \text{ح}(\text{أ}_{٢}) \cdot \text{ح}(\text{ب} \mid \text{أ}_{٢})$$

$$= \frac{١٨}{٣٠} \cdot \frac{٨}{١٨} = \frac{٨}{٣٠}$$

(٣) احتمال أن يكون العريف متفوقا يعني إما أن يكون ولدا متفوقا أو بنتا متفوقة

$$\therefore \text{ح}(\text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}_{١} \text{ و } \text{ب}) + \text{ح}(\text{أ}_{٢} \text{ و } \text{ب})$$

$$= \frac{٤}{٣٠} + \frac{٨}{٣٠} = \frac{١٢}{٣٠}$$

(٤) $$\text{ح}(\text{أ}_{٢} \mid \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}_{٢}) \cdot \text{ح}(\text{ب} \mid \text{أ}_{٢})}{\text{ح}(\text{ب})}$$

$$= \frac{\frac{١٨}{٣٠} \times \frac{٨}{١٨}}{\frac{١٢}{٣٠}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٢) :

ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة فما هواحتمال الحصول على مجموع ٤ أو١٢ ؟

الحل

أ ــ الحصول على مجموع ٤

ب ــ الحصول على مجموع ١٢

أ ، ب حادثتان مانعتان (متنافيتان)

ح (أ أو ب) =ح (أ) +ح (ب)

$$= \frac{٣}{٣٦} + \frac{١}{٣٦}$$

$$= \frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$$

مثال (٣) :

أعلنت جامعة الملك عبدالعزيزعن شغل ٣ وظائف سكرتارية بها ، فتقدم لها ٤ رجال ، ٣ نساء . وعند الاختيار وجدت اللجنة أنهم جميعا متساوون في الخبرة والمؤهلات فقررت الاختيارعشوائيا ، احسب احتمال اختيار:

١ ــ رجلان　　　　　　２ ــ رجلان على الأقل

الحل

يلاحظ أن احتمال اختياررجل في المحاولة الأ ولى لا يساوي احتمال اختيار رجل في المحاولة الثانية .

١ ــ هناك ٣ ترتيبات يمكن بها اختيار ٢ رجل من بين ٣ لشغل الوظيفة وهى $\,^{٣}ق_{٢} = ٣$

ــ احتمال الحصول على أي ترتيب $= \frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٣٥}$

∴ احتمال اختيار رجلين $= ٣ \times \frac{٦}{٣٥} = \frac{١٨}{٣٥}$

٢ ــ رجلان على الأقل تعني رجلين أو ثلاث رجال

(أ) احتمال اختيار رجلين $= \frac{١٨}{٣٥}$

(ب) هناك حالة واحدة يمكن بها اختيار ٣ رجال من بين ٣ وهى

$ق^{٣}_{٣} = ١$

احتمال الحصول على هذه الحالة $= \frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{٣٥}$

∴ احتمال اختيار رجلين على الأقل $= \frac{١٨}{٣٥} + \frac{٤}{٣٥} = \frac{٢٢}{٣٥}$

مثال (٤) :

مخزنان الأ ول به ٢٠ سلعة جيدة ، ٥ رديئة ، والثاني به ٣٠ سلعة جيدة ، ١٠ رديئة ، سحبت سلعة من كل من المخزنين ، فما هو احتمال أن تكون سلعة واحدة على الأقل من السلعتين جيدة ؟

الحل

أ ــ سلعة جيدة من الخزن الأ ول .

ب ــ سلعة جيدة من المخزن الثاني .

أ ، ب حادثان غير مانعين .

∴ ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) ـ ح (أ و ب)

$= \frac{٢٠}{٢٥} + \frac{٣٠}{٤٠} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{٣٠}{٤٠} =$

$= \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٥} = \frac{١٩}{٢٠} = ٩٥ر٠$

تماريـــــن

١ ــ حقيبة بها ٥ كرات سوداء ، ٤ بيضاء سحبت ٣ كرات عشوائيا ، أوجد احتمال أن يكون اثنان منهما سوداوين .

٢ ــ حقيبة بها ٣ كرات سوداء ، ٤ بيضاء ، وحقيبة أخرى بها ٥ كرات سوداء وكرتان بيضاء . نقلت كرة من الحقيبة الأولى إلى الثانية ثم سحبت كرة من الحقيبة الثانية ، فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

٣ ــ كيس يحتوي على ٤ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء ، اختار شخص كرتين عشوائيا فما هو احتمال حصوله على واحدة من كل لون ؟

٤ ــ مكتبة ذات ثلاثة أرفف ، الأول به ٢٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثاني به ٢٠ كتابا منها ٥ كتب خضراء والثالث به ١٥ كتابا منها ٥ كتب خضراء . أختير أحد الأرفف وسحب منه كتاب أوجد الاحتمالات الآتية :

(أ) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن الرف الأول .

(ب) أن يكون الكتاب المسحوب أخضر ومن المكتبة .

(جـ) إذا علم أن الكتاب المسحوب أخضر فما احتمال أن يكون من الرف الأول ؟

٥ ــ مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية ، فإذا كان احتمال أن يكون المصباح من هذا الإنتاج تالفا هو $\frac{١}{٥}$ واخترنا عشوائيا ٤ مصابيح ، فما هو احتمال أن يكون من بينها مصباح على الأكثر تالف ؟

٦ ــ إذا كان ٢٥٪ من الطلبة ، ١٥٪ من الطالبات بإحدى الكليات يدرسون الرياضيات وكانت الطالبات تكون ٤٠٪ من العدد الكلي لتلاميذ الكلية . أختير تلميذ عشوائيا ووجد أنه يدرس الرياضيات . فما احتمال أن يكون هذا التلميذ طالبة ؟

٧ ــ ثلاث صناديق يحتوي الأول على ٣ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء

ويحتوي الثاني على ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء

ويحتوي الثالث على ٢ كرة بيضاء ، ٣ كرات حمراء

أختير صندوق عشوائيا وسحبت منه كرة عشوائيا .

(أ) فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

(ب) إذا علم أن الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الثالث ؟

٨ ــ عند إلقاء ٣ قطع عملة دفعة واحدة ــ ما هو احتمال الحصول على صورتين على الأكثر ؟

٩ــ ستة رجال كل منهم معه زوجته وجلس الا ثنا عشر في غرفة واحدة.

أ ــ إذا اخترنا شخصين عشوائيا من بين الا ثني عشر شخصا فما هو احتمال أن يكونا زوجا وزوجته؟

ب ــ إذا اخترنا ٤ أشخاص عشوائيا من الحجرة أوجد الاحتمالات الآتية:

أولا : أن يكونوا زوجين وزوجتيهما.

ثانيا: أن لا يوجد زوج وزوجته بين الأربعة المختارين.

ثالثا: أن يوجد زوج وزوجته والباقي مختلف.

* * *

الباب الثاني

التوزيعات الاحتمالية

(٢ــ١) ــ المتغير العشوائي:

يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى المتغير العشوائي، وهذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال (١) : إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة. هنا التجربة العشوائية هى إلقاء الزهرتين، ونتيجة التجربة هى النقاط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين. هذا المقدار يأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ١٢ وعلى ذلك فإن مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للزهرتين متغير عشوائيا. متغير لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة وعشوائي لأنه يرافق نتائج تجربة عشوائية.

مثال (٢) : اختيار طالب من بين طلاب الجامعة. التجربة العشوائية هى اختيار طالب ونتيجة التجربة أحد طلاب الجامعة. المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون طول الطالب ــدخل أسرة الطالبــ عدد أفراد أسرة الطالب.. الخ. فإن اقتصرت دراستنا على طول الطالب فإن هذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب طول الطالب الذي اختير وربما تأخذ أي قيمة ١٦٥ سم أو ١٦٦ أو أي قيمة بينهما. وعلى ذلك فإن طول الطالب متغير عشوائيا لأنه يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

(أ) المتغير العشوائي المنفصل:

يقال إن المتغير العشوائي منفصل إذا أخذ قيما منفصلة عن بعضها البعض أي يوجد بينهما ثغرات.

مثال (٣) : عدد أفراد الأسرة متغير منفصل لأنه يأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... وهذه القيم يوجد بينها ثغرات، فمثلا لا يوجد عائلة عدد أفرادها ٤½ فرد.

مثال (٤) : مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة.

(ب) المتغير العشوائي المتصل:

يقال إن المتغير العشوائي متصل إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في نطاق تغيره.

مثال (٥) : طول الطالب متغير متصل لأنه يأخذ أي قيمة في نطاق تغير الطول، فإذا كانت أصغر

وأكبر قيمة للطول هى : ١٥٠ سم ، ٢٠٠ سم على التوالي فطول الطالب يمكن أن يكون أي قيمة بين هاتين القيمتين فربما يكون ١٦٥ سم أو ١٦٦ سم أو أي قيمة بينهما حسب دقة القياس .

(٢ــ٢) ــ التوزيع الاحتمالي :

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ما (س مثلا) عبارة عن دالة تعطي احتمالات قيم س المختلفة ، وهذه الدالة عبارة عن جدول أو صيغة رياضية تبين قيم س المختلفة واحتمالا تها وتحقق عدة شروط معينة نذكرها فيما بعد .

مثال (٦) : الجدول الآتي يبين قيم متغير عشوائي س والتوزيع الاحتمالي ح (س) لهذا المتغير العشوائي :

س	٢	٤	٥	٨
ح (س)	١ر٠	٣ر	٤ر٠	٢ر٠

مثال (٧) : الدالة الآتية تبين التوزيع الاحتمالي ح (س) لمتغير عشوائي س

$$ح (س) = {}^{٥}ق_{س} \left(\frac{١}{٤}\right)^{س} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٥ - س} \quad حيث\ س = ٠ ، ١ ، ٢ ، \ldots ، ٥$$

(أ) التوزيع الاحتمالي المنفصل:

إذا كانت س متغيرا عشوائيا يأخذ القيم

$$س_{١} ، س_{٢} ، \ldots ، \ldots \ldots ، س_{ن}$$

باحتمالات $ح (س_{١}) ، ح (س_{٢}) ، \ldots \ldots ، ح (س_{ن})$

بشرط أن (١) $ح (س) \geq صفر$ لجميع قيم س

(٢) $\sum_{س} ح (س) = ١$

فإنه يقال إن س متغير عشوائي يتبع توزيعا احتماليا منفصلا دالته الاحتمالية هي د(س) .

مثال (٨) : اشترى شخص ٤ بطيخان، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو $\frac{٢}{٥}$ ، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد البطيخ التالف.

الحل

نفرض أن س هى عدد البطيخ التالف

س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

نوجد احتمالات أن تأخذ س هذه القيم

س = صفر يعني أن البطيخات كلها جيدة

نعنى أن الأولى جيدة والثانية جيدة والثالثة جيدة والرابعة جيدة وهذه حوادث جميعا مستقلة.

ح (س = ٠) = ح (الأولى جيدة) × ح (الثانية جيدة) ×

ح (الثالثة جيدة) × ح (الرابعة جيدة)

$$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٨١}{٦٢٥}$$

س = ١ يعني أن هناك بطيخة واحدة تالفة والثلاث الأخرى جيدة

وهناك أربع حالات تظهر بها هذه النتيجة.

ح (س = ١) = ٤ ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية جيدة) ×

ح (الثالثة جيدة) × ح (الرابعة جيدة)

$$= ٤ \left(\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \right) = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$$

س = ٢ يعني أن هناك بطيختين تالفتين و بطيختين جيدتين

وهناك ٦ حالات تظهر بها هذه النتيجة.

ح (س = ٢) = ٦ ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية تالفة) ×

ح (الثالثة جيدة) × ح (الرابعة جيدة)

$$= ٦ \left(\frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} \right) = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$$

س = ٣ يعني أن هناك ٣ بطيخات تالفة و واحدة جيدة

وهناك ٤ حالات تظهر بها هذه النتيجة.

∴ ح (س = ٣) = ٤ ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية تالفة) ×

ح (الثالثة تالفة) × ح (الرابعة جيدة)

= ٤ ($\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٣}{٥}$) = $\frac{٩٦}{٦٢٥}$

س = ٤ يعني أن جميع البطيخات تالفة
ح (س = ٤) = ح (الأولى تالفة) × ح (الثانية تالفة) ×
ح (الثالثة تالفة) × ح (الرابعة تالفة) .

= $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{١٦}{٦٢٥}$

على ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ح (س)	$\frac{٨١}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٩٦}{٦٢٥}$	$\frac{١٦}{٦٢٥}$	١

مثال (٩) : ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة ، أوجد التوزيع الاحتمالي لمجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي .

الحل

نفرض أن س هى مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي
س تأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . . . . ، ١٢

نتائج التجربة	١،١	٢،١ ١،٢	٣،١ ٢،٢ ١،٣	٤،١ ٣،٢ ٢،٣ ١،٤	٥،١ ٤،٢ ٣،٣ ٢،٤ ١،٥	٦،١ ٥،٢ ٤،٣ ٣،٤ ٢،٥ ١،٦	٦،٢ ٥،٣ ٤،٤ ٣،٥ ٢،٦	٦،٣ ٥،٤ ٤،٥ ٣،٦	٦،٤ ٥،٥ ٤،٦	٦،٥ ٥،٦	٦،٦
س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

∴ ح (س = ٢) = ح (١ ، ١) = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{٣٦}$

$$\text{ح}\ (\text{س} = ٣) = \text{ح}\ (١ ، ٢) + \text{ح}\ (٢ ، ١)$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣٦}$$

$$\text{ح}\ (\text{س} = ٤) = \text{ح}\ (١ ، ٣) + \text{ح}\ (٢ ، ٢) + \text{ح}\ (٣ ، ١)$$

$$= ٣ \left(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \right) = \frac{٣}{٣٦}$$

وهكذا حتى

$$\text{ح}\ (\text{س} = ١٢) = \text{ح}\ (٦ ، ٦) = \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$$

وعلى ذلك يكون التوزيع الاحتمالي المطلوب هو:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	المجموع
ح (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$	١

(ب) التوزيع الاحتمالي المستمر (المتصل) :

إذا كانت س متغيرا عشوائيا مستمرا وكانت هناك دالة د (س) تحقق الشروط الآتية :

١ ـ د (س) $\geq$ صفر لجميع قيم س .

٢ ـ $\int$ د (س) ءس = ١

فإنه يقال أن س متغير عشوائي يتبع توزيعا احتماليا مستمرا دالة كثافته الاحتمالية هى د (س) . وفي هذه الحالة يكون:

$$\text{ح}\ (\text{س} \in \text{أ}) = \int_{\text{أ}} \text{د}\ (\text{س})\ \text{ءس}$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع س في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى الدالة د (س) .

ملاحظة :

١ ــ الشرط الأول : يعني أن هذه الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي .

٢ ــ الشرط الثاني : يعنى أن المساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوي الواحد .

مثال (١٠) : أثبت أن الدالة الآتية هى دالة توزيع احتمالي مستمر.

د(س) = $\frac{1}{8}$ س حيث ٠ ≤ س ≤ ٤

ثم أوجد: ح (١ ≤ س ≤ ٣) ، ح (س ≤ ٢)

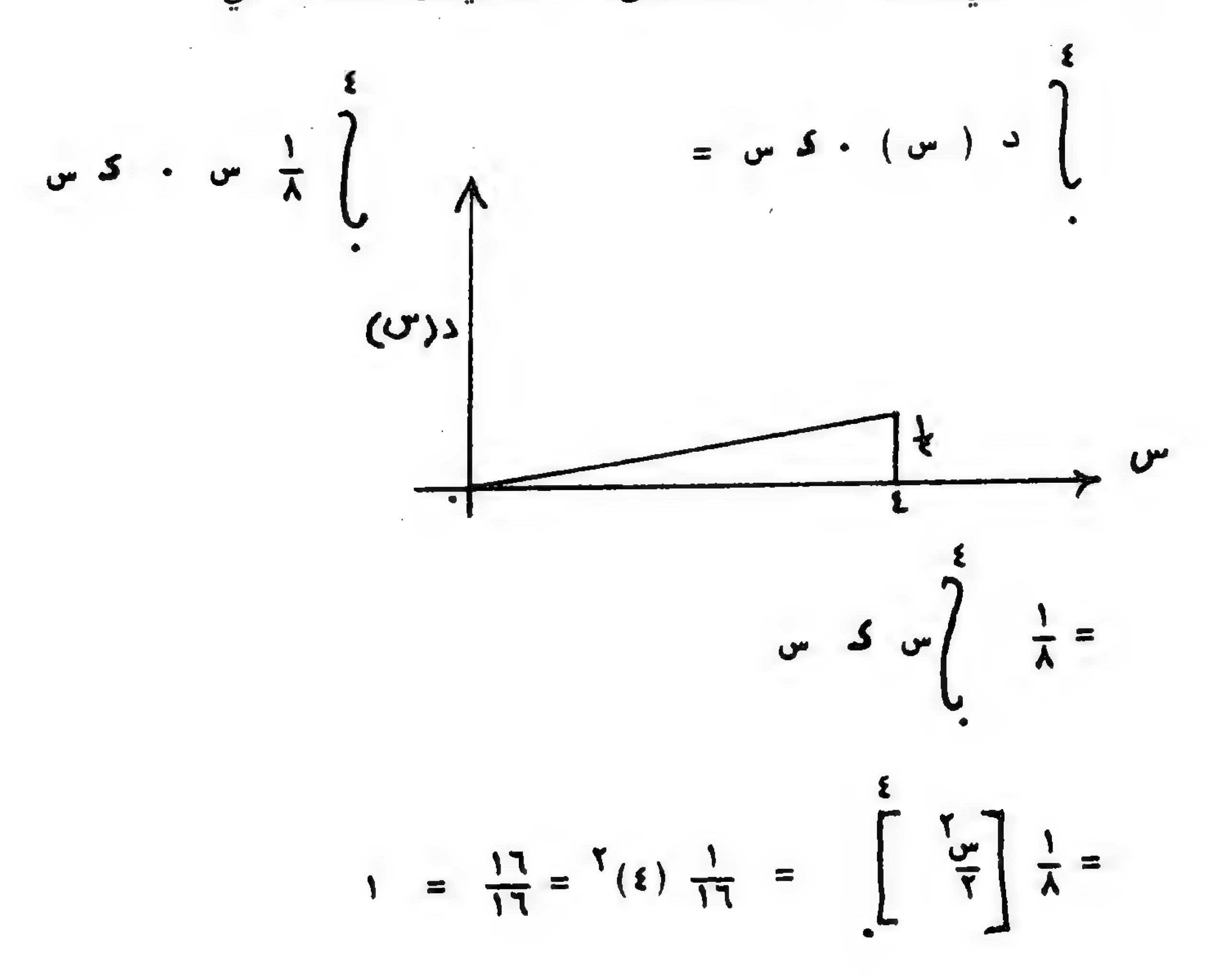
، ح (س ≥ ١)

الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي لابد من توافر الشروط السابق ذكرها .

ــ الشرط الأول هو أن الدالة موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي س متحقق حيث أن الدالة موجبة في المدى صفر ≤ س ≤ ٤ .

ــ الشرط الثاني ، وهو أن المساحة تحت منحنى الدالة تساوي الواحد نثبته فيما يلي :



$$\int_{0}^{4} \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ء}\text{س} = \int_{0}^{4} \frac{1}{8}\,\text{س} \cdot \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{1}{8} \int_{0}^{4} \text{س}\ \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{\text{س}^{2}}{2} \right]_{0}^{4} = \frac{1}{16}(4)^{2} = \frac{16}{16} = 1$$

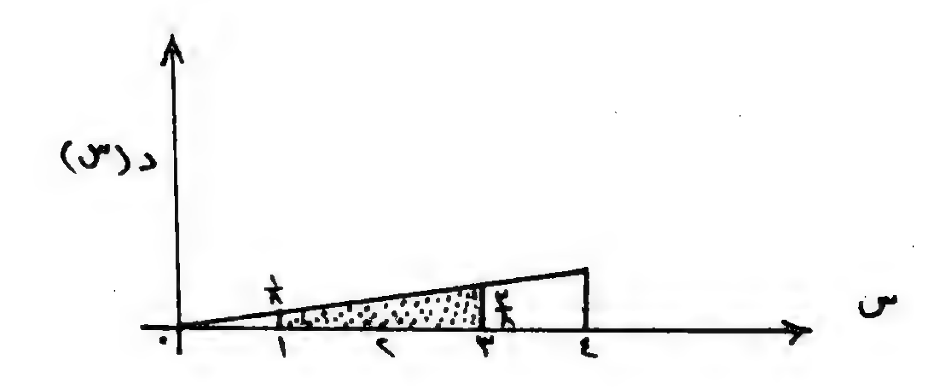
وهذا يحقق الشرط الثاني.

$\therefore$ الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{8}\,\text{س} \qquad 0 \leq \text{س} \leq 4$

دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س.

$$-\ \text{ح}(1 \leq \text{س} \leq 3) = \int_{1}^{3} \frac{1}{8}\,\text{س} \cdot \text{ء}\,\text{س}$$

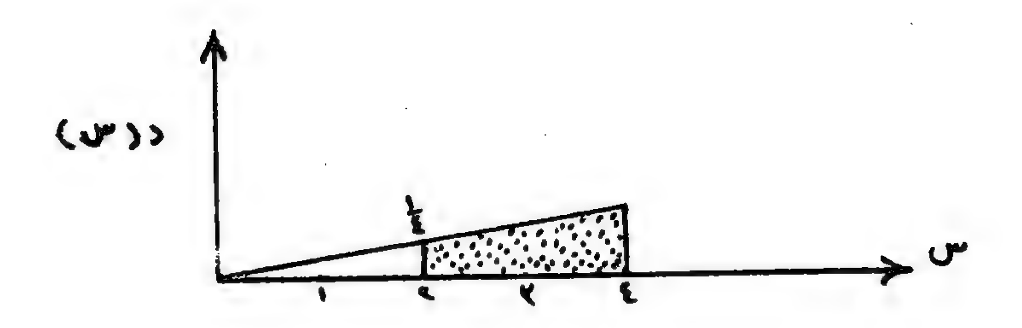
$$= \frac{1}{8} \int_{1}^{3} \text{س} \cdot \text{ء}\,\text{س}$$



$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\text{س}^{2}}{2}\right]_{1}^{3} = \frac{1}{16}(9 - 1) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$-\ \text{ح}(\text{س} \geq 2) = \int_{2}^{4} \frac{1}{8}\,\text{س} \cdot \text{ء}\,\text{س}$$

$$= \frac{1}{8} \int_{2}^{4} س \; ءس$$



$$= \frac{1}{8} \left[\frac{س^{2}}{2} \right]_{2}^{4} = \frac{1}{16} \left(16 - 4 \right) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$- \; ح \left(س \leq 1 \right) = \int_{0}^{1} \frac{1}{8} س \; ءس = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} س \; ءس$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{س^{2}}{2} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{16} \left(1 - 0 \right) = \frac{1}{16}$$

مثال (١١) : أثبت أن الدالة

$$د(س) = 6 س (1 - س) \quad حيث \quad 0 \leq س \leq 1$$

دالة توزيع احتمالي مستمر

الحل

لكي تكون الدالة السابقة دالة توزيع احتمالي مستمر لابد من توافر الشروط السابق ذكرها .

الشرط الأول : متحقق حيث أن الدالة موجبة في المدى . $\leq س \leq 1$

الشرط الثاني: نثبته كما يلي :

$$\int_{ب}^{أ} د(س)\, ى س = \int_{ب}^{أ} ٦ س (١ - س)\, ى س$$

$$= ٦ \int_{ب}^{أ} (س - س^{٢})\, ى س$$

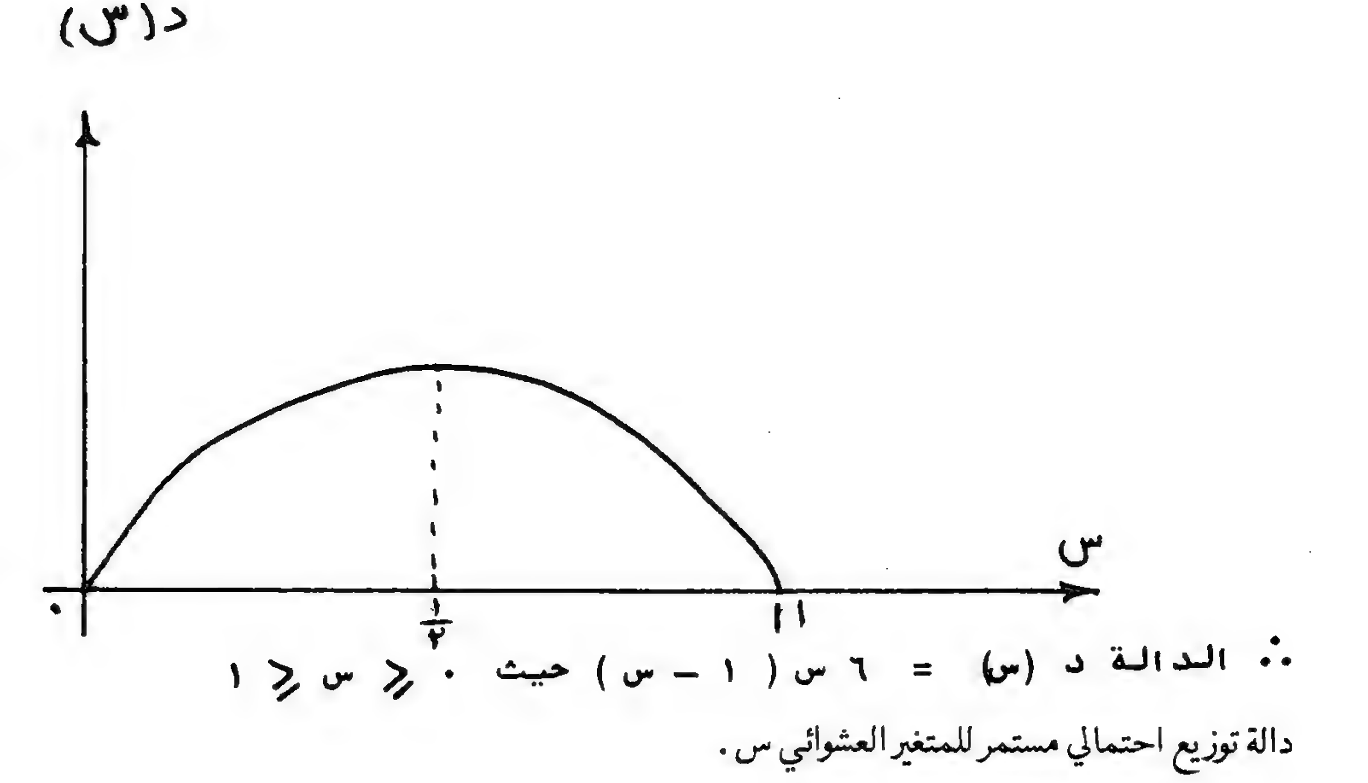
$$= ٦ \left\{ \int_{ب}^{أ} س\, ى س - \int_{ب}^{أ} س^{٢}\, ى س \right\}$$

$$= ٦ \left\{ \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{١} - \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{١} \right\}$$

$$= ٦ \left\{ \left(\frac{١}{٢} - ٠ \right) - \left(\frac{١}{٣} - ٠ \right) \right\}$$

$$= ٦ \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} \right)$$

$$= ٦ \times \frac{١}{٦} = ١$$

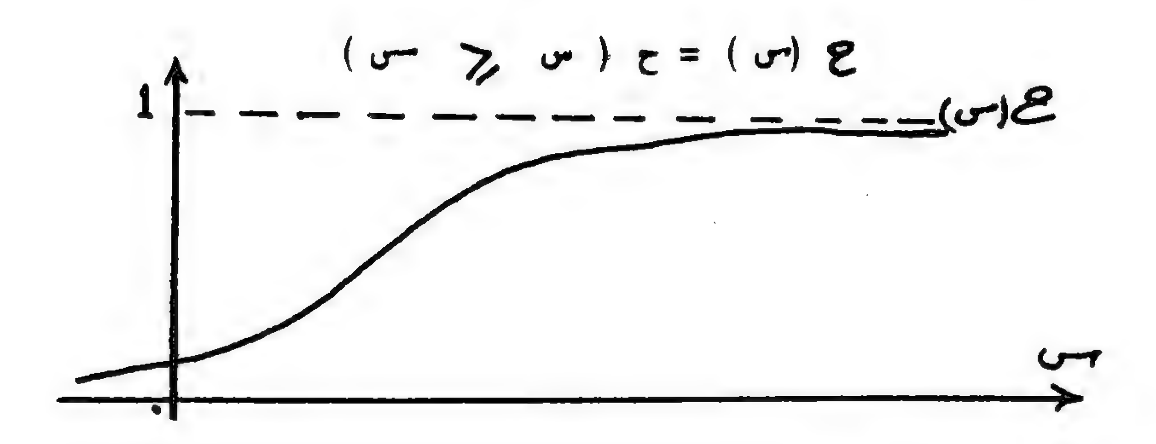


∴ الدالة د (س) = ٦ س (١ - س) حيث ٠ ≤ س ≤ ١

دالة توزيع احتمالي مستمر للمتغير العشوائي س.

(٢ـ٣) ـ دالة التوزيع التراكمية :

يتحدد التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي س أما بدلالة دالته الاحتمالية أو بدلالة دالة جديدة تسمى دالة التوزيع التراكمية وتعرف بالآتي:



و يلاحظ على هذا التعريف ما يلي :

أ ــ $\text{ح}(\text{س})$ = دالة غير متناقصة

ب ــ $\text{ح}(-\infty)$ = صفر

جـ ــ $\text{ح}(+\infty) = ١$

كما يلاحظ أنه إذا كانت س متغيرا عشوائيا مستمرا فان

$$\text{ح}(\text{س}) = \text{ح}(\text{س} \leq \text{س})$$

$$= \int_{-\infty}^{\text{س}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$$

و بتفاضل الطرفين نجد أن

$$\left(\frac{\text{ء}\,\text{ح}(\text{س})}{\text{ء}\,\text{س}}\right)_{\text{س}=\text{س}} = \text{د}(\text{س})$$

وهذا يعني أنه إذا عرفت دالة التوزيع التراكمية يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي والعكس صحيح . و بالمثل إذا كانت س متغيرا منفصلا .

مثال (١٢) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي س هى

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٨}\,\text{س} \quad \text{حيث} \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٤$$

أوجد دالة التوزيع التراكمية .

الحل

دالة التوزيع التراكمية هى

$$\text{ع}(\text{س}) = \text{ح}(\text{س} \leqslant \text{س})$$

$$= \int_{-\infty}^{\text{س}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{1}{8} \int_{0}^{\text{س}} \text{س}\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{\text{س}^2}{2} \right]_{0}^{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{16} \quad \text{حيث} \quad 0 \leqslant \text{س} \leqslant 4$$

$$\therefore \text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} 0 & \text{س} < 0 \\ \frac{\text{س}^2}{16} & 0 \leqslant \text{س} < 4 \\ 1 & \text{س} \geq 4 \end{cases}$$

مثال (١٣) : أوجد دالة التوزيع التراكمية للمثال رقم (٨) .

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
ح (س)	$\frac{٨١}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٩٦}{٦٢٥}$	$\frac{١٦}{٦٢٥}$
ع (س)	$\frac{٨١}{٦٢٥}$	$\frac{٢٩٧}{٦٢٥}$	$\frac{٥١٣}{٦٢٥}$	$\frac{٦٠٩}{٦٢٥}$	$\frac{٦٢٥}{٦٢٥}$

(٢ـ٤) ـ بعض خواص التوزيعات الاحتمالية :

يوجد عدة خواص تميز التوزيعات الاحتمالية نذكر منها خاصتين هامتين وهما :

(أ) القيمة المتوقعة للتوزيع :

القيمة المتوقعة للتوزيع أو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي هو القيمة المتوسطة للمتغير و يرمز لها بالرمز μ وتعطى بالمعادلة :

$$\mu = \begin{cases} \sum س\, ح(س) & \text{إذا كانت س متغير منفصلا} \\ \int س\, د(س)\, ء س & \text{إذا كانت س متغير متصلا} \end{cases}$$

ويمكن تفسير متوسط التوزيع على أنه إذا تكررت التجربة العشوائية عددا لا نهائيا من المرات وفي كل مرة لاحظنا نتيجة التجربة وقيمة المتغير العشوائي الذي يرافقها فيكون متوسط التوزيع عبارة عن الوسط الحسابي لهذا العدد اللانهائي من قيم المتغير العشوائي .

(ب) الانحراف المعياري للتوزيع :

يعرف تباين التوزيع كالآتي :

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum س^2 ح(س) - \mu^2 & \text{إذا كانت س متغير منفصلا} \\ \int س^2 د(س)\, ء س - \mu^2 & \text{إذا كانت س متغير متصلا} \end{cases}$$

والانحراف المعياري (σ) هو الجذر التربيعي للتباين . و يقيس الانحراف المعياري مقدار تشتت قيم المتغير العشوائي .

مثال (١٤) : أوجد المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الآتي :

$$د(س) = ٦\, س(١ - س) \quad \text{حيث} \quad ٠ \leqslant س \leqslant ١$$

الحل

ـ متوسط التوزيع $\mu = \int س\, د(س)\, ء س$

$$= ٦ \int_{٠}^{١} س^2 (١ - س)\, ء س$$

$$= ٦ \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣})\ \text{ك}\ \text{س}$$

$$= ٦ \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{١}$$

$$= ٦ \left[\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} \right] = ٦ \times \frac{٤-٣}{١٢}$$

$$= ٦ \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٢}$$

ـ تباين التوزيع $\sigma^{٢} = \int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\ \text{د}(\text{س})\ \text{ك}\ \text{س} - \mu^{٢}$

$$= ٦ \int_{٠}^{١} \text{س}^{٣} (١ - \text{س})\ \text{ك}\ \text{س} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$$

$$= ٦ \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٣} - \text{س}^{٤})\ \text{ك}\ \text{س} - \frac{١}{٤}$$

$$= ٦ \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{\text{س}^{٥}}{٥} \right]_{٠}^{١} - \frac{١}{٤}$$

$$= ٦ \left[\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥} \right] - \frac{١}{٤}$$

$$= ٦ \times \frac{٥-٤}{٢٠} - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٦}{٢٠} - \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٢٠}$$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^{٢}}$

$$= \sqrt{\frac{١}{٢٠}}$$

مثال (١٥) : أعلنت وزارة الصحة عن إرسال ٣ بعثات لدراسة إدارة المستشفيات فتقدم لها ٤ رجال ، ٣ نساء . وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة ـ فتقرر اتباع طريقة الاختيار العشوائي .

أوجد

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

(ب) متوسط عدد النساء المختارات .

(جـ) الانحراف المعياري لعدد النساء المختارات .

الحل

نفرض أن س هى عدد النساء المختارات

∴ س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

$$ح (س = ٠) = {}^{٣}ق_{٠} \left(\frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} \times \frac{٢}{٥} \right) = \frac{٤}{٣٥}$$

$$ح (س = ١) = {}^{٣}ق_{١} \left(\frac{٣}{٧} \times \frac{٤}{٦} \times \frac{٣}{٥} \right) = \frac{١٨}{٣٥}$$

$$ح (س = ٢) = {}^{٣}ق_{٢} \left(\frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٦} \times \frac{٤}{٥} \right) = \frac{١٢}{٣٥}$$

$$ح (س = ٣) = {}^{٣}ق_{٣} \left(\frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٦} \times \frac{١}{٥} \right) = \frac{١}{٣٥}$$

∴ التوزيع الاحتمالي يكون

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ح (س)	$\frac{٤}{٣٥}$	$\frac{١٨}{٣٥}$	$\frac{١٢}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	١

س	ح (س)	س ح (س)	$س^{٢}$ ح (س)
٠	$\frac{٤}{٣٥}$	٠	٠
١	$\frac{١٨}{٣٥}$	$\frac{١٨}{٣٥}$	$\frac{١٨}{٣٥}$
٢	$\frac{١٢}{٣٥}$	$\frac{٢٤}{٣٥}$	$\frac{٤٨}{٣٥}$
٣	$\frac{١}{٣٥}$	$\frac{٣}{٣٥}$	$\frac{٩}{٣٥}$
Σ	١	$\frac{٤٥}{٣٥}$	$\frac{٧٥}{٤٥}$

∴ متوسط التوزيع $= \sum س ح(س)$

$= \frac{٤٥}{٣٥} = ١٫٣$ امرأة

تباين التوزيع $\sigma^2 = \sum س^2 ح(س) - \mu^2$

$= \frac{٧٥}{٣٥} - \left(\frac{٤٥}{٣٥}\right)^2$

$= \frac{٢٤}{٤٩} = ٠٫٥$

ومنه نجد أن الانحراف المعياري للتوزيع $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$= \sqrt{٠٫٥}$ امرأة

تمارين

١ ــ إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي تنتجها إحدى الشركات تتبع التوزيع الاحتمالي الآتي :

$د(س) = أ س^2 (١ - س)$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant ١$

س : العمر بالسنة

أ : مقدار ثابت

والمطلوب :

ــ إيجاد قيمة أ .

ــ إذا اختير مصباح عشوائي فما هو احتمال أن يعيش أكثر من ٤ شهور.

ــ أوجد متوسط عمر المصباح وكذلك الانحراف المعياري .

ــ أوجد دالة التوزيع التراكمية ومثلها بيانيا .

٢ ــ إذا كانت س تتبع التوزيع الأسي الآتي :

$د(س) = أ هـ^{-٢س}$ حيث $٠ \leqslant س \leqslant \infty$

أوجد :

ـ قيمة أ

ـ ح (س > ١)

ـ دالة التوزيع التراكمية .

ـ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

٣ ـ أعلنت جامعة الملك عبدالعزيز عن شغل ٣ وظائف سكرتارية فتقدم لها ٥ رجال ، ٥ نساء وعند الاختيار وجد أنهم متساوون في المؤهل والخبرة ، فقررت اللجنة الاختيار عشوائيا .

أوجد :

ـ التوزيع الاحتمالي لعدد النساء المختارات .

ـ متوسط عدد النساء المختارات وكذلك الانحراف المعياري .

ـ دالة التوزيع التراكمية .

٤ ـ إذا كان احتمال أن تصل الطائرة التي تقوم من مطار القاهرة متجهة إلى مطار جدة في موعدها هو $\frac{٣}{٤}$ ، قامت خمس طائرات من القاهرة متجهة إلى جدة .

أوجد :

ـ التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها .

ـ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

ـ دالة التوزيع التراكمية .

٥ ـ اثبت أن الدالة

$$ح(س) = أ\,ب^{س-1} \quad \text{حيث} : س = ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots ، \infty$$

$$٠ \leq أ ، ب \leq ١$$

$$أ + ب = ١$$

تمثل توزيعا احتماليا ، ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية وكذلك المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع .

الباب الثالث

بعض التوزيعات الاحتمالية



بعض التوزيعات الاحتمالية

أولا : توزيع ذي الحدين :

(٣ـ١) ـ تعريف :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين أو عدم ظهوره (مثل نجاح الطالب أو فشله ، المصباح الكهربائي جيد أو تالف ، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها ، إصابة طائرة الهدف للعدو أو عدم إصابتها له ، ظهور الصورة عند القاء قطعة نقود أو عدم ظهورها ، .... إلخ) وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو ع (وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو ل = ١ ـ ع). فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة ن مرة ، فإن احتمال ظهور هذا الحدث س مرة من بين الـ ن من هذه المحاولات هو:

$$\text{ح}(\text{س}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}}\ \text{ع}^{\text{س}}\ \text{ل}^{\text{ن} - \text{س}}$$

حيث س تأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ،ن

وبالتعويض بقيم س المختلفة نحصل على :

$$\text{ح}(\text{س} = ٠) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}\ \text{ع}^{٠}\ \text{ل}^{\text{ن} - ٠} = \text{ل}^{\text{ن}}$$

$$\text{ح}(\text{س} = ١) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\ \text{ع}\ \text{ل}^{\text{ن} - ١} = \text{ن}\ \text{ع}\ \text{ل}^{\text{ن} - ١}$$

$$\text{ح}(\text{س} = ٢) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\ \text{ع}^{٢}\ \text{ل}^{\text{ن} - ٢} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢!}\ \text{ع}^{٢}\text{ل}^{\text{ن} - ٢}$$

$$\text{ح}(\text{س} = ٣) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\ \text{ع}^{٣}\ \text{ل}^{\text{ن} - ٣} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)}{٣!}\ \text{ع}^{٣}\text{ل}^{\text{ن} - ٣}$$

.

.

.

.

$$\text{ح}(\text{س} = \text{ن}) = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\ \text{ع}^{\text{ن}}\ \text{ل}^{٠} = \text{ع}^{\text{ن}}$$

ومنها نجد أن مجموع الطرف الأيمن هو مجموع احتمالات قيم س المختلفة و يساوي $\sum_{س = ٠}^{ن} ح(س)$
ومجموع الطرف الأ يسر هو مفكوك ذي الحدين

$$(ل + ح)^{ن} = ١$$

وعلى ذلك فإن $\sum_{س = ٠} ح(س) = \sum {}^{ن}ق_{س} \, ح^{س} \, ل^{ن - س} = ١$

وهذا يبين أن ح (س) هي دالة توزيع احتمالي ، و يطلق عليها توزيع ذي الحدين .

(٣ـ٢) ـ بعض خصائص التوزيع :

(أ) متوسط التوزيع :

يمكن إثبات أن متوسط هذا التوزيع $= \sum_{س = صفر}^{ن} س \, ح(س)$

$$= \sum_{س = صفر}^{ن} س \, {}^{ن}ق_{س} \, ح^{س} \, ل^{ن - س}$$

$$= ن \, ح$$

(ب) الانحراف المعياري :

وكذلك يمكن إثبات أن

تباين التوزيع $\sigma^{٢} = \sum س^{٢} \, ح(س) - \mu^{٢}$

$$= ن \, ح \, ل$$

والانحراف المعياري $= \sqrt{ن \, ح \, ل}$

مثال (١) : ألقيت قطعة نقود ٤ مرات . فما هو احتمال ظهور الصورة ٣ مرات .

الحل

عدد التجارب أو المحاولات $ن = ٤$

احتمال ظهور الصورة في أي مرة $ح = \frac{١}{٢}$

احتمال عدم ظهور الصورة في أي مرة $ل = ١ - ح = \frac{١}{٢}$

بفرض أن س عدد الصور التي تظهر على السطح العلوي

$\therefore ح(س) = {}^{٤}ق_{س} \left(\frac{١}{٢}\right)^{س} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤ - س}$ حيث س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

احتمال ظهور الصورة ٣ مرات $= ح(س = ٣)$

$$= {}^{٤}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$$

$$= \frac{٤}{١٦}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

مثال (٢) : اشترى شخص صندوقا به ٥ بطيخات. فإذا كان احتمال أن تكون أي منهم تالفة هو ٢ر٠، احسب احتمال أن تكون:

(I) ٢ تالفة (II) ٢ على الأكثر تالفة

(III) جميعها طيبة

الحل

عدد المحاولات ن = عدد البطيخات = ٥

احتمال أن تكون أي منهم تالفة ح = ٢ر٠

احتمال أن تكون أي منهم جيدة ل = ٨ر٠

نفرض أن س هو عدد البطيخات التالفة

$\therefore ح(س) = {}^{٥}ق_{س} (٢ر٠)^{س} (٨ر٠)^{٥ - س}$

حيث س = ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥

(I) احتمال أن تكون بطيختان تالفتين = ح (س = ٢)

$$= {}^{٥}ق_{٢} (٢ر٠)^{٢} (٨ر٠)^{٣}$$

= ٢٠٤٨ر٠

(II) احتمال أن تكون بطيختان على الأكثر تالفة = ح (س ⩽ ٢)

= ح (س = ٠) + ح (س = ١) + ح (س = ٢)

= ^{٥}ق$_{٠}$ (٢ر٠)^{٠} (٨ر٠)^{٥} + ^{٥}ق$_{١}$ (٢ر٠)^{١} (٨ر٠)^{٤} + ^{٥}ق$_{٢}$ (٢ر٠)^{٢} (٨ر٠)^{٣}

= ٣٢٧٦٨ر٠ + ٤٠٩٦٠ر + ٢٠٤٨٠ر

= ٩٤٢٠٨ر٠

(III) احتمال أن تكون جميعها طيبة = ح (س = ٠)

= ^{٥}ق$_{٠}$ (٢ر٠)^{٠} (٨ر٠)^{٥}

= ٣٢٧٦٧ر٠

مثال (٣) : إذا كان ١٠٪ من إنتاج إحدى آلات المسامير تالفا، وسحبنا عشوائيا ٥ مسامير من إنتاج هذه الآلة. أوجد:

١ ــ التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة وضعه في صورة جدول

٢ ــ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له.

الحل

عدد المسامير ن = ٥

احتمال أن يكون أي مسمار تالفا = ١ر٠

احتمال أن يكون أي مسمار غير تالف = ١ − ١ر٠ = ٩ر٠

نفرض أن س ــ عدد المسامير التالفة

و بذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هى:

ح (س) = ^{٥}ق$_{س}$ (١ر)^{س} (٩ر)$^{٥ - س}$

حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

١ ــ التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة:

بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بقيم س المختلفة نحصل على :

$$ح (س = ٠) = {}^{٥}ق_{٠} (١ر)^{٠} (٩ر)^{٥} = ٠ر٥٩٠٤٩$$

$$ح (س = ١) = {}^{٥}ق_{١} (١ر)^{١} (٩ر)^{٤} = ٠ر٣٢٨٠٥$$

$$ح (س = ٢) = {}^{٥}ق_{٢} (١ر)^{٢} (٩ر)^{٣} = ٠ر٠٧٢٩٠$$

$$ح (س = ٣) = {}^{٥}ق_{٣} (١ر)^{٣} (٩ر)^{٢} = ٠ر٠٠٨١٠$$

$$ح (س = ٤) = {}^{٥}ق_{٤} (١ر)^{٤} (٩ر)^{١} = ٠ر٠٠٠٤٥$$

$$ح (س = ٥) = {}^{٥}ق_{٥} (١ر)^{٥} (٩ر)^{٠} = ٠ر٠٠٠٠١$$

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد المسامير التالفة في صورة جدول هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
ح (س)	٠ر٥٩٠٤٩	٠ر٣٢٨٠٥	٠ر٠٧٢٩٠	٠ر٠٠٨١٠	٠ر٠٠٠٤٥	٠ر٠٠٠٠١	١

٢ ــ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري :

متوسط التوزيع $= ن ع$

$= ٥ \times ١ر٠$

$=$ ٥ر٠ مسمار تالف

ــ الانحراف المعياري للتوزيع $= \sqrt{ن ع ل}$

$= \sqrt{٥ \times ١ر٠ \times ٩ر٠}$

$= \sqrt{٤٥ ر٠}$ مسمار تالف

مثال (٤) : قدرت شركة للطيران أن احتمال وصوف الطائرة التي تقوم من لندن إلى مطار جدة في ميعادها هو ٧ر٠ ، فإذا قامت ٤ طائرات من طائرات الشركة من مطار لندن متجهة إلى مطار جدة. فأوجد:

(أ) التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها.

(ب) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول ومنه استنتج :

١ ــ احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها.
٢ ــ احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها.

(جـ) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري.

الحل

عدد الطائرات = ٤

احتمال وصول أي طائرة في موعدها = ٧ر٠

احتمال عدم وصول أي طائرة في موعدها = ١ ــ ٧ر٠ = ٣ر٠

نفرض أن س عدد الطائرات التي تصل في ميعادها.

(أ) وبذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

ح (س) = ^{٤}ق$_{س}$ (٧ر)^{س} (٣ر)$^{٤ - س}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(ب) بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالي بقيم س المختلفة نحصل على:

ح (س = ٠) = ^{٤}ق$_{٠}$ (٧ر)^{٠} (٣ر)^{٤} = ٠٠٨١ر٠

ح (س = ١) = ^{٤}ق$_{١}$ (٧ر)^{١} (٣ر)^{٣} = ٠٧٥٦ر٠

ح (س = ٢) = ^{٤}ق$_{٢}$ (٧ر)^{٢} (٣ر)^{٢} = ٢٦٤٦ر٠

ح (س = ٣) = ^{٤}ق$_{٣}$ (٧ر)^{٣} (٣ر)^{١} = ٤١١٦ر٠

ح (س = ٤) = ^{٤}ق$_{٤}$ (٧ر)^{٤} (٣ر)^{٠} = ٢٤٠١ر٠

∴ التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في موعدها يكون:

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ح (س)	٠٠٨١ر٠	٠٧٥٦ر٠	٢٦٤٦ر٠	٤١١٦ر٠	٢٤٠١ر٠	١

(١) احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها:

أى ح (س ≥ ١) = ح (س = ١) + ح (س = ٢) + ح (س = ٣)

+ ح (س = ٤) = ١ – ح (س = ٠)

= ١ – ٠٠٨١ر٠ = ٩٩١٩ر٠

(٢) احتمال وصول ٣ طائرات على الأقل في ميعادها:

أى ح (س ≥ ٣) = ح (س = ٣) + ح (س = ٤)

= ٤١١٦ر + ٢٤٠١ر٠

= ٦٥١٧ر٠

(جـ) متوسط عدد الطائرات التي تصل في موعدها وكذلك انحرافها المعياري:

ـــ متوسط التوزيع = ن ح

= ٤×٧ر٠

= ٢ر٨ طائرة

ـــ الانحراف المعياري للتوزيع = $\sqrt{\text{ن ح ل}}$

= $\sqrt{٤ \times ٧ر \times ٣ر٠}$

= $\sqrt{٨٤ر٠}$ طائرة

مثال (٥) : إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو٨ر٠ ، فاذا أغارت خمس طائرات على الهدف فأوجد:

١ ــ التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصيب الهدف .

٢ ــ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري له .

الحل

عدد الطائرات المغيرة ن = ٥

احتمال إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة = ٨ر٠

احتمال عدم إصابة الهدف بأي طائرة مغيرة = ٢ر٠

نفرض أن س عدد الطائرات التي تصيب الهدف .

و بذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالية هى :

١ ــ ح (س) = $^{٥}\text{ق}_{\text{س}}$ $(٨ر)^{\text{س}}$ $(٢ر)^{٥ - \text{س}}$

حيث أن س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٥

٢ ــ متوسط التوزيع والانحراف المعياري :

ـ متوسط التوزيع = ن ح = ٥ × ٨ر٠

= ٤ طائرات

ـ الانحراف المعياري للتوزيع $= \sqrt{ن\ ح\ ل}$

$= \sqrt{٥ \times ٨ر٠ \times ٢ر٠}$

$= \sqrt{٨ر٠}$

ثانيا : توزيع بواسون :

(٣ـ٣) ـ تعريف :

توجد بعض الظواهر النادرة مثل الزلازل ـ الحرائق ـ الحوادث على إحدى الطرق ـ عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما من كتاب. والتوزيع الذي يعطي احتمالات لقيم هذه الظواهر النادرة يسمى «توزيع بواسون» .

فإذا كانت س ترمز لقيم الظاهرة (مثلا تكون س ـ عدد الزلازل في السنة أو عدد الحرائق الأسبوعية أو عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق) وكانت ح (س) احتمال وقوع س فان:

$$ح\ (س) = \frac{م^{س}\ هـ^{-م}}{س\ !}$$

حيث : (I) س هى قيم الظاهرة وتأخذ القيم ٠ ، ١، ٢، ٣، ..... .

(II) م متوسط قيم الظاهرة (متوسط التوزيع) .

(III) هـ مقدار ثابت. وهو الأساس الطبيعي اللوغاريتمي.

و بالتعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بقيم س المختلفة نحصل على :

$$ح\ (س = ٠) = \frac{م^{٠}\ هـ^{-م}}{صفر\ !} = هـ^{-م}$$

$$ح\ (س = ١) = \frac{م^{١}\ هـ^{-م}}{١\ !} = \frac{م}{١\ !}\ هـ^{-م}$$

$$ح\ (س = ٢) = \frac{م^{٢}\ هـ^{-م}}{٢\ !} = \frac{م^{٢}}{٢\ !}\ هـ^{-م}$$

$$ح(س=٣) = \frac{م^{٣}هـ^{-م}}{٣!} = \frac{م^{٣}}{٣!}هـ^{-م}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ومنها نجد أن مجموع الطرف الأيمن هومجموع احتمالات قيم س المختلفة و يساوى

$$\sum_{س=٠}^{\infty} ح(س)$$

ومجموع الطرف الأ يسر

$$= هـ^{-م}\left(١ + \frac{م}{١!} + \frac{م^{٢}}{٢!} + \frac{م^{٣}}{٣!} + \cdots\cdots\right)$$

$$= هـ^{-م} هـ^{م}$$

$$= ١$$

وعلى ذلك فان

$$\sum_{س=٠}^{\infty} ح(س) = \sum_{س=٠}^{\infty} \frac{م^{س}هـ^{-م}}{س!} = ١$$

وهذا يبين أن ح (س) هى دالة توزيع احتمالي و يطلق عليها توزيع بواسون.

والجدول الآتي يعطي قيم $هـ^{-م}$ لبعض قيم (م):

م	$هـ^{-م}$	م	$هـ^{-م}$	م	$هـ^{-م}$	م	$هـ^{-م}$
٠	١ر٠٠٠	١ر١	٠ر٣٣٣	٢ر١	٠ر١٢٢	٣ر١	٠ر٠٤٥
٠ر١	٠ر٩٠٥	١ر٢	٠ر٣٠١	٢ر٢	٠ر١١١	٣ر٢	٠ر٠٤١
٠ر٢	٠ر٨١٩	١ر٣	٠ر٢٧٣	٢ر٣	٠ر١٠٠	٣ر٣	٠ر٠٣٧
٠ر٣	٠ر٧٤١	١ر٤	٠ر٢٤٧	٢ر٤	٠ر٠٩١	٣ر٤	٠ر٠٣٣
٠ر٤	٠ر٦٧٠	١ر٥	٠ر٢٢٣	٢ر٥	٠ر٠٨٢	٣ر٥	٠ر٠٣٠
٠ر٥	٠ر٦٠٧	١ر٦	٠ر٢٠٢	٢ر٦	٠ر٠٧٤	٣ر٦	٠ر٠٢٧
٠ر٦	٠ر٥٤٩	١ر٧	٠ر١٨٣	٢ر٧	٠ر٠٦٧	٣ر٧	٠ر٠٢٥
٠ر٧	٠ر٤٩٧	١ر٨	٠ر١٦٥	٢ر٨	٠ر٠٦١	٣ر٨	٠ر٠٢٢
٠ر٨	٠ر٤٤٩	١ر٩	٠ر١٥٠	٢ر٩	٠ر٠٥٥	٣ر٩	٠ر٠٢٠
٠ر٩	٠ر٤٠٧	٢ر٠	٠ر١٣٥	٣ر٠	٠ر٠٥٠	٤ر٠	٠ر٠١٨
١ر٠	٠ر٣٦٨						

(٣ـ٤) ـ بعض خصائص التوزيع :

(أ) متوسط التوزيع $\mu = م$

البرهان

$$= \sum_{س=٠}^{\infty} س\ ح(س)$$

$$= \sum_{س=٠}^{\infty} س \times \frac{م^{س}\ هـ^{-م}}{س!}$$

$$= هـ^{-م} \left(صفر + ١ \frac{م}{!١} + ٢ \frac{م^{٢}}{!٢} + ٣ \frac{م^{٣}}{!٣} + ٤ \frac{م^{٤}}{!٤} + \cdots \right)$$

$$= هـ^{-م} م \left(\frac{١}{!١} + \frac{م}{!١} + \frac{م^{٢}}{!٢} + \frac{م^{٣}}{!٣} + \cdots \right)$$

$$= هـ^{-م} \; م \; هـ^{م}$$

$$= م$$

(ب) الانحراف المعياري :

يمكن بنفس الأسلوب اثبات أن :

تباين التوزيع $$\sigma^2 = \sum_{س = ٠}^{\infty} س^{٢} ح(س) - \mu^{٢}$$

$$= م$$

والانحراف المعياري $= \sqrt{م}$

مثال (٦) : إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو حادثتين ، فما احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأ يام؟

الحل

نفرض أن س هى عدد الحوادث اليومية .

متوسط عدد الحوادث اليومية م = ٢

$$\therefore ح(س) = \frac{٢^{س} هـ^{-٢}}{!س} \quad \text{حيث} \quad س = ٠ ، ١ ، ٢ ، \cdots$$

من الجدول نجد أن $هـ^{-٢} = ١٣٥ر٠$

$$\therefore ح(س) = \frac{(٢)^{س} (١٣٥ر٠)}{!س}$$

احتمال وقوع ٣ حوادث في أحد الأ يام $= ح(س = ٣)$

$$= \frac{٢^{٣} (١٣٥ر٠)}{!٣} = ١٨٠ر٠$$

مثال (٧) : إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٦ر٠ ـ فاحسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين .

الحل

نفرض أن س هى عدد الزلازل السنوية

متوسط عدد الزلازل السنوية = ٦ر٠

$$\therefore ح(س) = \frac{(٦ر٠)^{س} هـ^{-٦ر٠}}{س!} \quad \text{حيث } س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ....$$

من الجدول نجد أن $هـ^{-٦ر٠} = ٥٤٩ر٠$

$$\therefore ح(س) = \frac{(٦ر٠)^{س} (٥٤٩ر٠)}{س!}$$

احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين = ح (س = ٢)

$$= \frac{(٦ر)^{٢}(٥٤٩ر٠)}{٢!}$$

$$= ٠٩٩ر٠$$

مثال (٨) : إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبيرة هو ثلاث حرائق. فما هو احتمال أن يقع فى أحد الشهور:

(I) حريقان؟ (II) حريقان على الأكثر؟ (III) حريقان على الأقل؟

الحل

نفرض أن س هى عدد الحرائق الشهرية في هذه المدينة

متوسط عدد الحرائق الشهرية م = ٣

$$\therefore ح(س) = \frac{٣^{س} هـ^{-٣}}{س!} \quad \text{حيث } س = ٠، ١، ٢، ....$$

من الجدول نجد أن $هـ^{-٣} = ٠٥ر٠$

$$\therefore ح(س) = \frac{٣^{س} (٠٥ر٠)}{س!}$$

(I) احتمال وقوع حريقين = ح (س = ٢) $= \frac{٣^{٢} \times ٠٥ر٠}{٢!} = ٢٢٥ر٠$

(II) احتمال وقوع حريقين على الأكثر = ح (س ≥ ٢)

= ح (س = ٠) + ح (س = ١) + ح (س = ٢)

$$= \frac{(٣)^{٠} (٠٫٠٥)}{صفر\,!} + \frac{٣\ (٠٫٠٥)}{١\,!} + ٠٫٢٢٥$$

= ٠٫٠٥٠ + ٠٫١٥٠ + ٠٫٢٢٥

= ٠٫٤٢٥

(III) احتمال وقوع حريقين على الأقل = ح (س ≤ ٢)

= ١ − [ح (س = ٠) + ح (س = ١)]

= ١ − (٠٫٠٥ + ٠٫١٥)

= ١ − ٠٫٢٠

= ٠٫٨٠

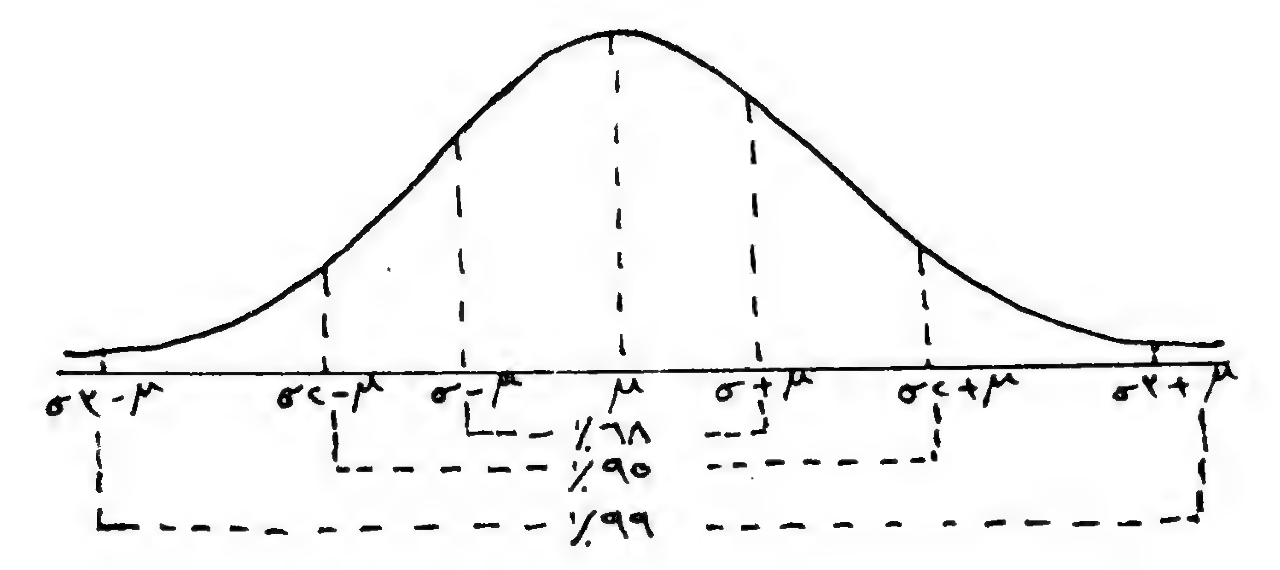
ثالثا : التوزيع الطبيعي :

(٣ـ٥) ـ مقدمة :

نعلم من دراستنا السابقة أن المنحنى الطبيعي يعتبر من أهم المنحنيات التكرارية في الإحصاء لأنه يمثل كثيرا من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال والأوزان والدخول والدرجات التي يحصل عليها الطلاب وغيرها من الظواهر المستمرة (المتصلة).

ومنحنى التوزيع الطبيعي يشبه الناقوس من حيث الشكل، ومن خصائصه أنه متماثل حول العمود الذي يمر بقمة هذا المنحنى لذلك فهو يقسمه إلى قسمين متماثلين تماما. كما أن هذا التوزيع يتحدد بمعرفة كل من وسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ)، حيث μ هى النقطة التي تتمركز حولها الغالبية العظمى من مفردات التوزيع، σ هو مقياس يبين تشتت أو تباعد المفردات عن بعضها.

ونلاحظ أن جميع مفردات التوزيع الطبيعي تقريبا تنحصر بين $\mu - ٣\sigma$ ، $\mu + ٣\sigma$ وأن ٩٥٪ من المفردات تنحصر بين $\mu - ٢\sigma$ ، $\mu + ٢\sigma$ تقريبا وأن ٦٨٪ من المفردات تنحصر بين $\mu - \sigma$ ، $\mu + \sigma$ تقريبا.



فإذا كانت هناك ظاهرة ما (نرمز لقيمها بالرمز س) تتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ فإن دالة كثافته الاحتمالية هى:

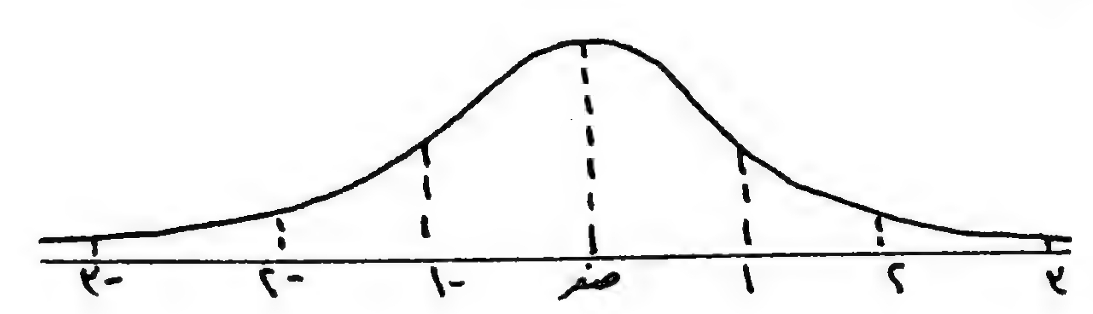
$$\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{(\text{س}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{حيث} \qquad -\infty < \text{س} < \infty$$

ط : مقدار ثابت

ويمكن حساب احتمال وقوع س في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى. ولتسهيل حساب مثل هذه الاحتمالات لابد أن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

(٣ـ٦) ـ التوزيع الطبيعي القياسي:

هذا التوزيع له نفس خصائص أي توزيع طبيعي إلا أن وسطه μ = صفر وانحرافه المعياري $\sigma = 1$



فإذا كانت ص ترمز لقيم متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي:

فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون:

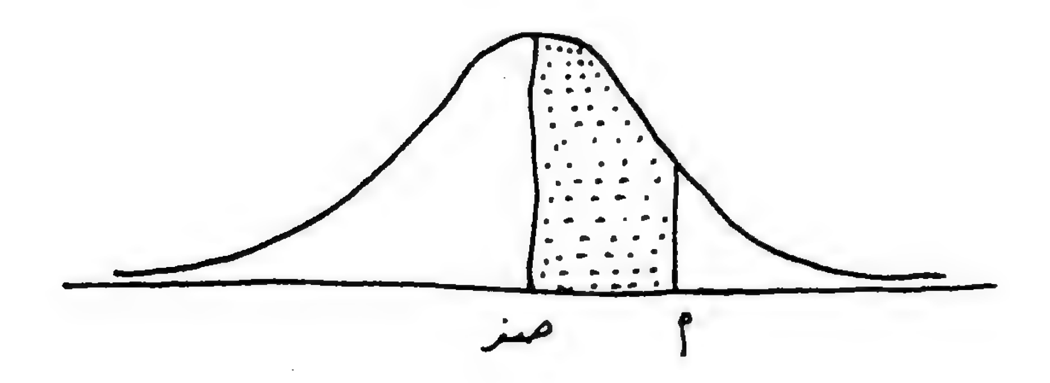
$$\text{د}(\text{ص}) = \frac{1}{\sqrt{2\,\text{ط}}}\ \text{هـ}^{-\frac{\text{ص}^2}{2}} \qquad -\infty < \text{ص} < \infty$$

ويمكن اثبات أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{د}(\text{ص})\, \text{ك ص} = \frac{1}{\sqrt{2\,\text{ط}}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{هـ}^{-\frac{\text{ص}^{2}}{2}}\, \text{ك ص} = 1$$

وعمليا فإن الغالبية العظمى لقيم ص تقع بين ــ ٣ ، + ٣ أو بمعنى آخر فإنه نادرا ما نجد قيمة للمتغير ص تقع خارج هذا المدى . ويمكن حساب احتمال وقوع ص في أي مدى نريده وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع في هذا المدى ، أي إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة داخل هذا المدى .

وهناك جداول تعطى احتمالات وقوع المتغير ص في مدى معين . فمثلا يمكن بواسطة هذه الجداول حساب احتمال وقوع ص بين ١ ، ٢ وتكتب ح (١≤ص≤ ٢) . والجدول الآتي يعطي احتمالات وقوع ص بين صفر وأي قيمة أخرى أ أي يعطي ح (٠≤ص≤ أ) .



فإذا رسمنا منحنى متماثلا وسطه صفر وأخذنا نقطة أ على المحور الأفقي فيكون ح (٠≤ ص≤أ) هى المساحة المظللة في الشكل . ويمكن الحصول على هذه المساحة (الاحتمال) من الجدول بعد معرفة قيمة أ .

و يلاحظ أن الجدول يعطي المساحة بين نقطة الأصل وقيم أ الموجبة ، كما نجد أن أ تبدأ من القيمة صفر وتزداد بمقدار ٠١ر حتى تصل إلى ٣٫٠٩ وهى أعلى قيمة يأخذها المتغير ص . ونظرا لأن المنحنى متماثل تماما حول المستقيم المار بنقطة الأصل (وسط التوزيع μ = صفر) فيمكن استخدام الجدول لإيجاد المساحة المحصورة بين صفر وقيم أ السالبة كما يتضح من الأمثلة الآتية :

جدول التوزيع الطبيعى القياسى

ص	صفر	٠١ر٠	٠٢ر	٠٣ر	٠٤ر	٠٥ر	٠٦ر	٠٧ر	٠٨ر	٠٩ر
صفر	صفر	٠٠٤٠ر	٠٠٨٠ر	٠١٢٠ر	٠١٦٠ر	٠١٩٩ر	٠٢٣٩ر	٠٢٧٩ر	٠٣١٩ر	٠٣٥٩ر
٠ر١	٠٣٩٨ر	٠٤٣٨ر	٠٤٧٨ر	٠٥١٧ر	٠٥٥٧ر	٠٥٩٦ر	٠٦٣٦ر	٠٦٧٥ر	٠٧١٤ر	٠٧٥٣ر
٠ر٢	٠٧٩٣ر	٠٨٣٢ر	٠٨٧١ر	٠٩١٠ر	٠٩٤٨ر	٠٩٨٧ر	١٠٢٦ر	١٠٦٤ر	١١٠٣ر	١١٤١ر
٠ر٣	١١٧٩ر	١٢١٧ر	١٢٥٥ر	١٢٩٣ر	١٣٣١ر	١٣٦٨ر	١٤٠٦ر	١٤٤٣ر	١٤٨٠ر	١٥١٧ر
٠ر٤	١٥٥٤ر	١٥٩١ر	١٦٢٨ر	١٦٦٤ر	١٧٠٠ر	١٧٣٦ر	١٧٧٢ر	١٨٠٨ر	١٨٤٤ر	١٨٧٩ر
٠ر٥	١٩١٥ر	١٩٥٠ر	١٩٨٥ر	٢٠١٩ر	٢٠٥٤ر	٢٠٨٨ر	٢١٢٣ر	٢١٥٧ر	٢١٩٠ر	٢٢٢٤ر
٠ر٦	٢٢٥٧ر	٢٢٩١ر	٢٣٢٤ر	٢٣٥٧ر	٢٣٨١ر	٢٤٢٢ر	٢٤٥٤ر	٢٤٨٦ر	٢٥١٧ر	٢٥٤٩ر
٠ر٧	٢٥٨٠ر	٢٦١١ر	١٦٤٢ر	٢٦٧٣ر	٢٧٠٤ر	٢٧٣٤ر	٢٧٦٤ر	٢٧٩٤ر	٢٨٢٣ر	٢٨٥٢ر
٠ر٨	٢٨٨١ر	٢٩١٠ر	٢٩٣٩ر	٢٩٧٦ر	٢٩٩٥ر	٣٠٢٣ر	٣٠٥١ر	٣٠٧٨ر	٣١٠٦ر	٣١٣٣ر
٠ر٩	٣١٥٩ر	٣١٨٦ر	٣٢١٢ر	٣٢٣٨ر	٣٢٦٤ر	٣٢٨٩ر	٣٣١٥ر	٣٣٤٠ر	٣٣٦٥ر	٣٣٨٩ر
١ر٠	٣٤١٣ر	٣٤٣٨ر	٣٤٦١ر	٣٤٨٥ر	٣٥٠٨ر	٣٥٣١ر	٣٥٥٤ر	٣٥٧٧ر	٣٥٩٩ر	٣٦٢١ر
١ر١	٣٦٤٣ر	٣٦٦٥ر	٣٦٨٦ر	٣٧٠٨ر	٣٧٢٩ر	٣٧٤٩ر	٣٧٧٠ر	٣٧٩٠ر	٣٨١٠ر	٣٨٣٠ر
١ر٢	٣٨٤٩ر	٣٨٦٩ر	٣٨٨٨ر	٣٩٠٧ر	٣٩٢٥ر	٣٩٤٤ر	٣٩٦٢ر	٣٩٨٠ر	٣٩٩٧ر	٤٠١٥ر
١ر٣	٤٠٣٢ر	٤٠٤٩ر	٤٠٦٦ر	٤٠٨٢ر	٤٠٩٩ر	٤١١٥ر	٤١٣١ر	٤١٤٧ر	٤١٦٢ر	٤١٧٧ر
١ر٤	٤١٩٢ر	٤٢٠٧ر	٤٢٢٢ر	٤٢٣٦ر	٤٢٥١ر	٤٢٦٥ر	٤٢٧٩ر	٤٢٩٢ر	٤٣٠٦ر	٤٣١٩ر
١ر٥	٤٣٣٢ر	٤٣٤٥ر	٤٣٥٧ر	٤٣٧٠ر	٤٣٨٢ر	٤٣٩٤ر	٤٤٠٦ر	٤٤١٨ر	٤٤٢٩ر	٤٤٤١ر
١ر٦	٤٤٥٢ر	٤٤٦٣ر	٤٤٧٤ر	٤٤٨٤ر	٤٤٩٥ر	٤٥٠٥ر	٤٥١٥ر	٤٥٢٥ر	٤٥٣٥ر	٤٥٤٥ر
١ر٧	٤٥٥٤ر	٤٥٦٤ر	٤٥٧٣ر	٤٥٨٢ر	٤٥٩١ر	٤٥٩٩ر	٤٦٠٨ر	٤٦١٦ر	٤٦٢٥ر	٤٦٣٣ر
١ر٨	٤٦٤١ر	٤٦٤٩ر	٤٦٥٦ر	٤٦٦٤ر	٤٦٧١ر	٤٦٧٨ر	٤٦٨٦ر	٤٦٩٣ر	٤٦٩٩ر	٤٧٠٦ر
١ر٩	٤٧٣١ر	٤٧١٩ر	٤٧٢٦ر	٤٧٣٢ر	٤٧٣٨ر	٤٧٤٤ر	٤٧٥٠ر	٤٧٥٦ر	٤٧٦١ر	٤٧٧٦ر
٢ر٠	٤٧٧٢ر	٤٧٧٨ر	٤٧٨٣ر	٤٧٨٨ر	٤٧٩٣ر	٤٧٩٨ر	٤٨٠٣ر	٤٨٠٨ر	٤٨١٢ر	٤٨١٧ر

ص	صفـر	٠ر٠١	٠٢ر	٠٣ر	٠٤ر	٠٥ر	٠٦ر	٠٧ر	٠٨ر	٠٩ر
٢ر١	٤٨٢١ر	٤٨٢٦ر	٤٨٣٠ر	٤٨٣٤ر	٤٨٣٨ر	٤٨٤٢ر	٤٨٤٦ر	٤٨٥٠ر	٤٨٥٤ر	٤٨٥٧ر
٢ر٢	٤٨٦١ر	٤٨٦٤ر	٤٨٦٨ر	٤٨٧١ر	٤٨٧٥ر	٤٨٧٨ر	٤٨٨١ر	٤٨٨٤ر	٤٨٨١ر	٤٨٩٠ر
٢ر٣	٤٨٩٣ر	٤٨٩٦ر	٤٨٩٨ر	٤٩٠١ر	٤٩٠٤ر	٤٩٠٦ر	٤٩٠٩ر	٤٩١١ر	٤٩١٠ر	٤٩١٦ر
٢ر٤	٤٩١٨ر	٤٩٢٠ر	٤٩٢٢ر	٤٩٢٥ر	٤٩٢٧ر	٤٩٢٩ر	٤٩٣١ر	٤٩٣٢ر	٤٩٣٤ر	٤٩٣٦ر
٢ر٥	٤٩٣٨ر	٤٩٤٠ر	٤٩٤١ر	٤٩٤٣ر	٤٩٤٥ر	٤٩٤٦ر	٤٩٤٨ر	٤٩٤٩ر	٤٩٥١ر	٤٩٥٢ر
٢ر٦	٤٩٥٣ر	٤٩٥٥ر	٤٩٥٦ر	٤٩٥٧ر	٤٩٥٩ر	٤٩٦٠ر	٤٩٦١ر	٤٩٦٢ر	٤٩٦٣ر	٤٩٦٤ر
٢ر٧	٤٩٦٥ر	٤٩٦٦ر	٤٩٦٧ر	٤٩٦٨ر	٤٩٦٩ر	٤٩٧٠ر	٤٩٧١ر	٤٩٧٢ر	٤٩٧٣ر	٤٩٧٤ر
٢ر٨	٤٩٧٤ر	٤٩٧٥ر	٤٩٧٦ر	٤٩٧٧ر	٤٩٧٧ر	٤٩٧٨ر	٤٩٧٩ر	٤٩٧٩ر	٤٩٨٠ر	٤٩٨١ر
٢ر٩	٤٩٨١ر	٤٩٨٢ر	٤٩٨٢ر	٤٩٨٣ر	٤٩٨٤ر	٤٩٨٤ر	٤٩٨٥ر	٤٩٨٥ر	٤٩٨٦ر	٤٩٨٦ر
٣ر٠	٤٩٨٧ر	٤٩٨٧ر	٤٩٨٧ر	٤٩٨٨ر	٤٩٨٨ر	٤٩٨٩ر	٤٩٨٩ر	٤٩٨٩ر	٤٩٩٠ر	٤٩٩٠ر

مثال (٩) : إذا كان ص متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي القياسي (μ = ٠ ، σ = ١) فأوجد :

(أ) ح (٠ ≤ ص ≤ ١ر٥٤) (ب) ح (ص ≥ ١ر٢٥)

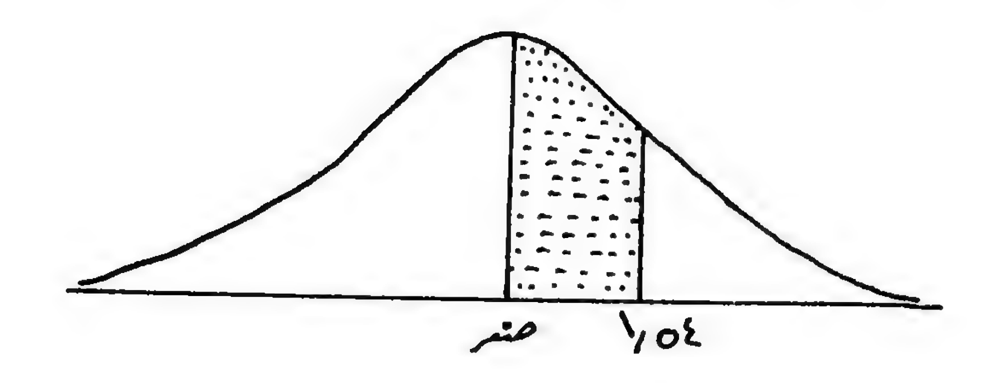
(جـ) ح (١ ≤ ص ≤ ٢) (د) ح (− ١ر٨ ≤ ص ≤ صفر)

(هـ) ح (ص ≤ − ٢ر١) (و) ح (− ٢ ≤ ص ≤ − ١)

(ز) ح (− ١ ≤ ص ≤ ١ر٢٨)

الحل

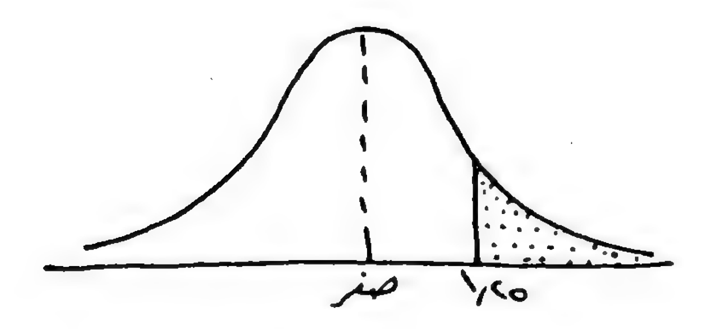
(أ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١ر٥٤ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ــ المساحة المظللة في الشكل.



ويمكن الحصول على هذه المساحة من الجدول مباشرة بالبحث عن القيمة التي تناظر ١ر٥ في العمود الأول وأسفل ٠ر٠٤.

وعلى ذلك يكون ح (٠ ≤ ص ≤ ١ر٥٤) = ٠ر٤٣٨٢

(ب) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ١ر٢٥ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ـــ المساحة المظللة في الشكل.



ونلاحظ أن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي:

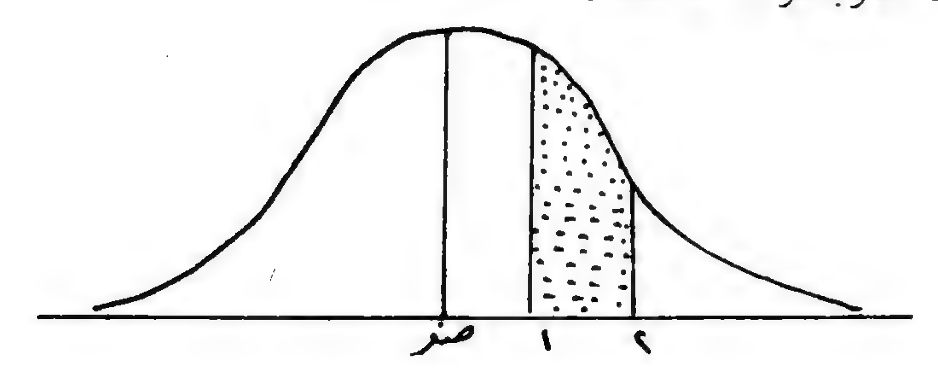
ح (ص ≥ ١ر٢٥) = ٠ر٥ − ح (٠ ≤ ص ≤ ١ر٢٥)

والجدول يعطي قيمة ح (٠ ≤ ص ≤ ١ر٢٥) مباشرة و بالتعويض بقيمتها نحصل على المطلوب، أي أن:

ح (ص ≥ ١ر٢٥) = ٠ر٥ − ٠ر٣٩٤٤

= ٠ر١٠٥٦

(جـ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط ، ١ ، ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب هو المساحة المظللة.



ولكن الجدول لا يعطي هذه المساحة مباشرة، ولكن يمكن الحصول عليها بملاحظة الآتي:

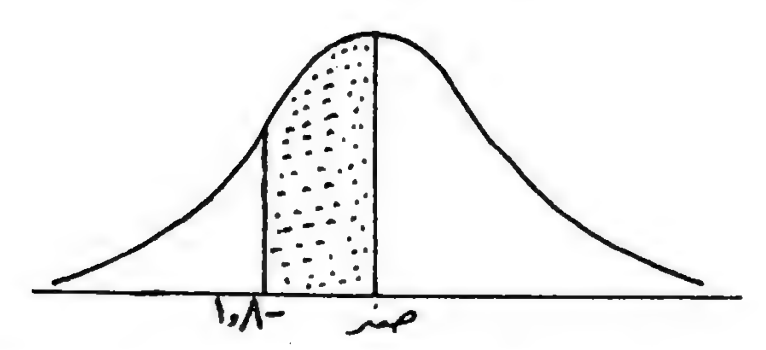
ح (١ ≤ ص ≤ ٢) = ح (٠ ≤ ص ≤ ٢) − ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

(من الجدول مباشرة)

= ٤٧٧٢ر − ٣٤١٣ر٠

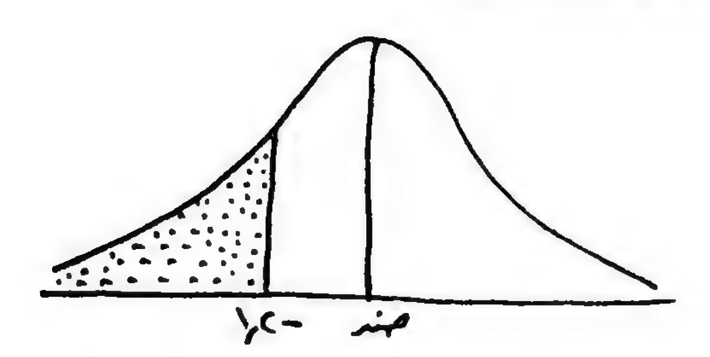
= ١٣٥٩ر٠

(د) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ــ ٨ر١ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ــ المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى فإن ح (ــ ٨ر١ ≥ ص ≥ صفر) = ح (صفر ≥ ص ≥ ٨ر١)
= ٤٦٤١ر٠ من الجدول مباشرة

(هـ) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقطة ــ ٢ر١ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ــ المساحة المظللة في الشكل



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى .

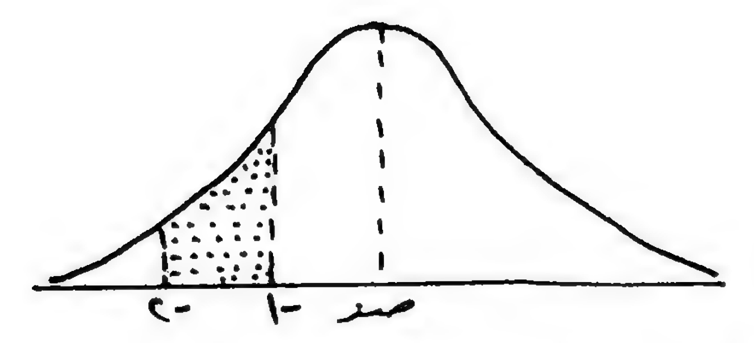
ح(ص ≥ − ٢ر١) = ح(ص ≤ ٢ر١)

= ٥ر − ح (صفر ≥ ص ≥ ٢ر١)

= ٥ر − ٣٨٤٩ر٠ (من الجدول مباشرة)

= ١١٥١ر٠

(و) نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط ــ ١ ، ــ ٢ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ــ المساحة المظللة في الشكل .



ولكن الجدول لا يعطي المساحة للقيم السالبة للمتغير، ونظرا لتماثل المنحنى فإن

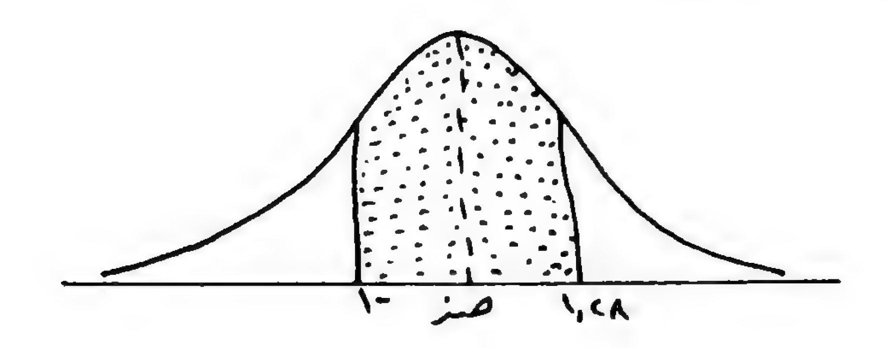
ح (- ٢ ≤ ص ≤ - ١) = ح (١ ≤ ص ≤ ٢)

= ح (٠ ≤ ص ≤ ٢) - ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠ر٤٧٧٢ - ٠ر٣٤١٣

= ٠ر١٣٥٩

(ز) (نرسم شكلا يوضح توزيعا طبيعيا متماثلا ونحدد النقط ــ ١ ، ١ر٢٨ على المحور الأفقي فيكون الاحتمال المطلوب ــ المساحة المظللة في الشكل .



وهذه المساحة تساوي ح (- ١ ≤ ص ≤ صفر) + ح (صفر ≤ ص ≤ ١ر٢٨)

= ح (صفر ≤ ص ≤ ١) + ح (صفر ≤ ص ≤ ١ر٢٨)

= ٠ر٣٤١٣ + ٠ر٣٩٩٧

= ٠ر٧٤١٠

(٣ــ٧) ــ حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي :

إذا كانت س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه μ وانحرافه المعياري σ وأردنا حساب أي احتمال حول المتغير س ، فإننا نحوله أولا إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ حيث أن الجداول التي تعطي المساحة هى الجداول الخاصة بالتوزيع القياسي فقط . فلحساب (أ ≤ س ≤ ب) مثلا فإن هذا الاحتمال يساوي

$$ح \left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leq ص \leq \frac{ب - \mu}{\sigma} \right)$$

والأمثلة الآتية توضح طريقة الحل:

مثال (١٠) : إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم . اخترنا عشوائيا أحد الطلبة ، ما احتمال أن يكون طوله :

(أ) أكبر من ١٨٤ سم .

(ب) أقل من ١٥٦ سم .

(جـ) ينحصر بين ١٦٥ ، ١٧٤ سم .

الحل

بفرض أن س ترمز لأطوال الطلاب

س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٦٨ سم وانحرافه المعياري ٦ سم

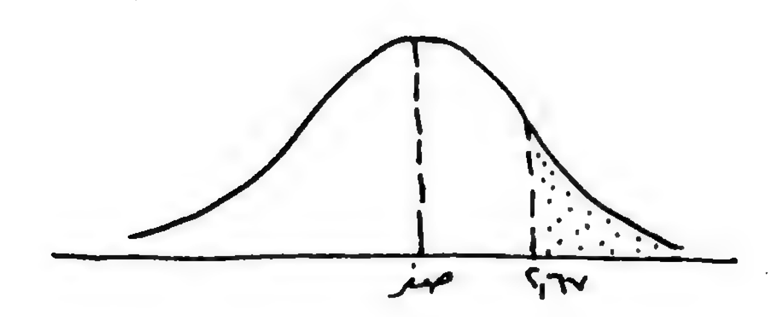
وبوضع $ص = \frac{س - ١٦٨}{٦}$

∴ ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا :

(أ) ح (س ≥ ١٨٤) :

عندما س = ١٨٤ فان

$$\therefore ص = \frac{١٨٤ - ١٦٨}{٦} = \frac{١٦}{٦} = ٢٫٦٧$$



وعلى ذلك :

$$\therefore ح (س \geq ١٨٤) = ح (ص \geq ٢٫٦٧)$$

$$= ٠٫٥ - ح (٠ \leq ص \leq ٢٫٦٧)$$

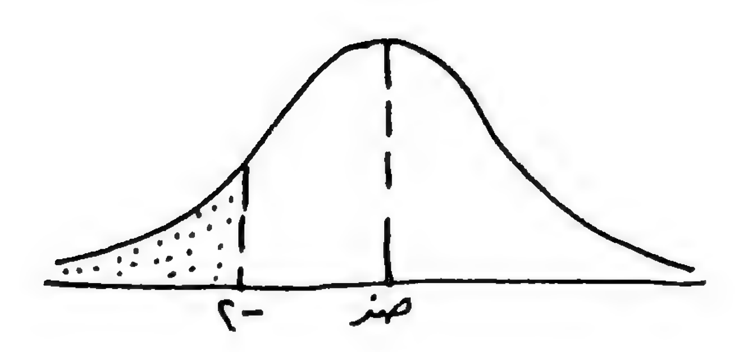
$$= ٠٫٥ - ٠٫٤٩٦٢$$

$$= ٠٫٠٠٣٨$$

(ب) ح (س ≤ ١٥٦) :

عندما س = ١٥٦ فان

$$ص = \frac{١٥٦ - ١٦٨}{٦} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$$



وعلى ذلك :

ح (س ≤ ١٥٦) = ح (ص ≤ -٢)

= ٥ر - ح (٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٥ر - ٤٧٧٢ر٠

= ٠٢٢٨ر٠

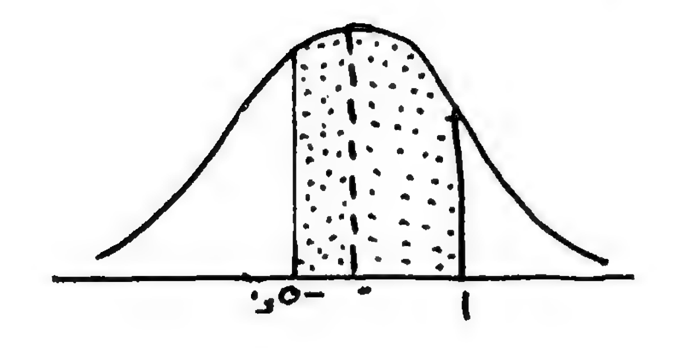
(حـ) ح (١٦٥ ≤ س ≤ ١٧٤) :

عندما س = ١٦٥ فان

$$ص = \frac{١٦٥ - ١٦٨}{٦} = \frac{-٣}{٦} = -٥ر٠$$

، عندما س = ١٧٤ فان

$$\therefore ص = \frac{١٧٤ - ١٦٨}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$$



وعلى ذلك :

ح (١٦٥ ≤ س ≤ ١٧٤) = ح (−٥ر ≤ ص ≤ ١)

= ح (−٥ر ≤ ص ≤ صفر) + ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ح (صفر ≤ ص ≤ ٥ر٠) + ح (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ١٩١٥ر + ٣٤١٣ر

= ٥٣٢٨ر٠

مثال (١١) : إذا كان دخل ٨٠٠ أسرة في مدينة جدة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٨٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال.

فأوجد:

(أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال.

(ب) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٢٤٠٠ ريال.

(جـ) احتمال الحصول على دخل ينحصر بين ١٦٥٠ ، ٢٢٥٠ ريالا.

(د) احتمال الحصول على دخل يقل عن ١٢٠٠ ريال.

(هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال.

الحل

بفرض أن س ترمز لدخول الأسر.

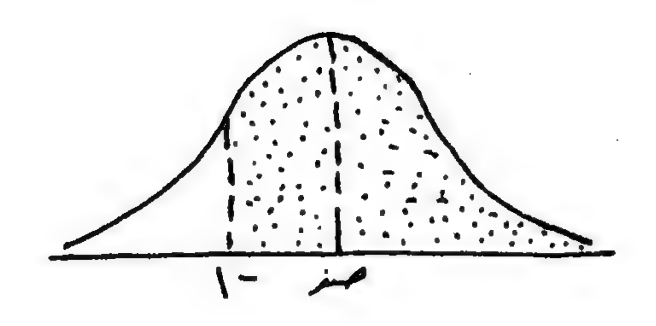
س تتبع توزيعا طبيعيا عاديا وسطه ١٨٠٠ ريالا وانحرافه المعياري ٣٠٠ ريال.

و بوضع ص = (س − ١٨٠٠) / ٣٠٠ فإن ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا.

∴ (أ) ح (س ≥ ١٥٠٠) ·

عندما س = ١٥٠٠ فان

ص = (١٥٠٠ − ١٨٠٠) / ٣٠٠ = −٣٠٠ / ٣٠٠ = − ١



∴ ح (س ≤ ١٥٠٠) = ح (ص ≤ − ١)

= ٥ر + ح (− ١ ≥ ص ≥ صفر)

= ٥ر + ح (٠ ≥ ص ≥ ١)

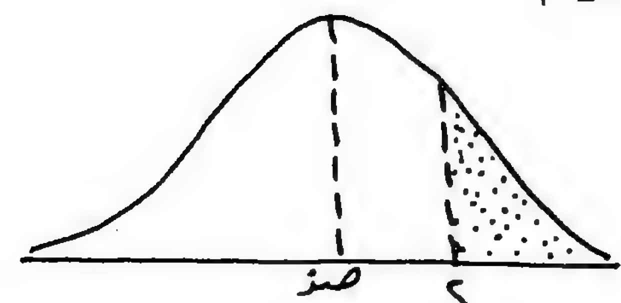
= ٥ر + ٣٤١٣ر٠

= ٨٤١٣ر٠

(ب) ح (س ≤ ٢٤٠٠) :

عندما س = ٢٤٠٠ فان

$$ص = \frac{٢٤٠٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = ٢$$



∴ ح (س ≤ ٢٤٠٠) = ح (ص ≤ ٢)

= ٥ر − ح (٠ ≥ ص ≥ ٢)

= ٥ر − ٤٧٧٢ر٠

= ٠٢٢٨ر٠

(حـ) ح (١٦٥٠ ≥ س ≥ ٢٢٥٠) :

عندما س = ١٦٥٠ فان

$$ص = \frac{١٦٥٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = \frac{- ١٥٠}{٣٠٠} = -٥ر٠$$

وعندما س = ٢٢٥٠ فان

$$ص = \frac{٢٢٥٠ - ١٨٠٠}{٣٠٠} = \frac{٤٥٠}{٣٠٠} = ٥ر١$$

∴ ح (١٦٥٠ ≥ س ≥ ٢٢٥٠) = ح (− ٥ر ≥ س ≥ ٥ر١)

= ح (− ٥ر ≥ ص ≥ صفر)

+ ح (٠ ≥ ص ≥ ٥ر١)

= ح (صفر ≥ ص ≥ ٥ر)

+ ح (٠ ≥ ص ≥ ٥ر١)

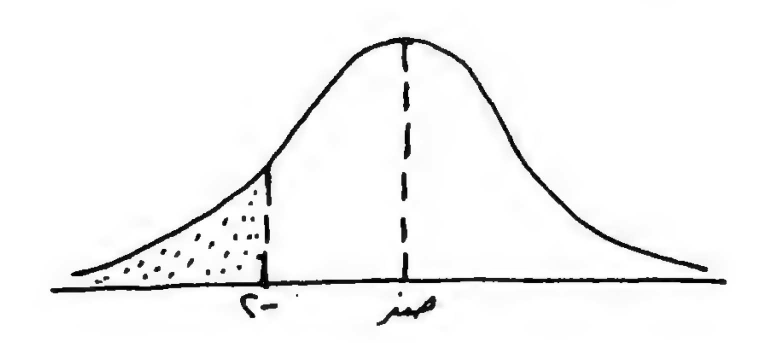
= ١٩١٥ر + ٤٣٣٢ر

= ٦٢٤٧ر٠

(د) ح (س ≥ ١٢٠٠) :

عندما س = ١٢٠٠ فان

ص = (١٢٠٠ − ١٨٠٠) / ٣٠٠ = (− ٦٠٠) / ٣٠٠ = − ٢



∴ ح (س ≥ ١٢٠٠) = ح (ص ≥ − ٢)

= ٥ر٠ − ح (− ٢ ≥ ص ≥ صفر)

= ٥ر٠ − ح (صفر ≥ ص ≥ ٢)

= ٥ر٠ − ٤٧٧٢ر٠

= ٠٢٢٨ر٠

(هـ) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال :

لإيجاد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال ، نوجد احتمال الحصول على دخل أكبر من ١٥٠٠ ريال ونضرب به في عدد الأسر فنحصل على المطلوب .

وحيث أن ح (س ≤ ١٥٠٠) = ٨٤١٣ر٠

من المطلوب (أ)

∴ عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠٠ ريال = ٠ر٨٤١٣ × ٨٠٠

= ٦٧٣ر٠٤

= ٦٧٣ أسرة ٠

رابعا : توزيع ت :

(٣ـ٨) ـ مقدمة :

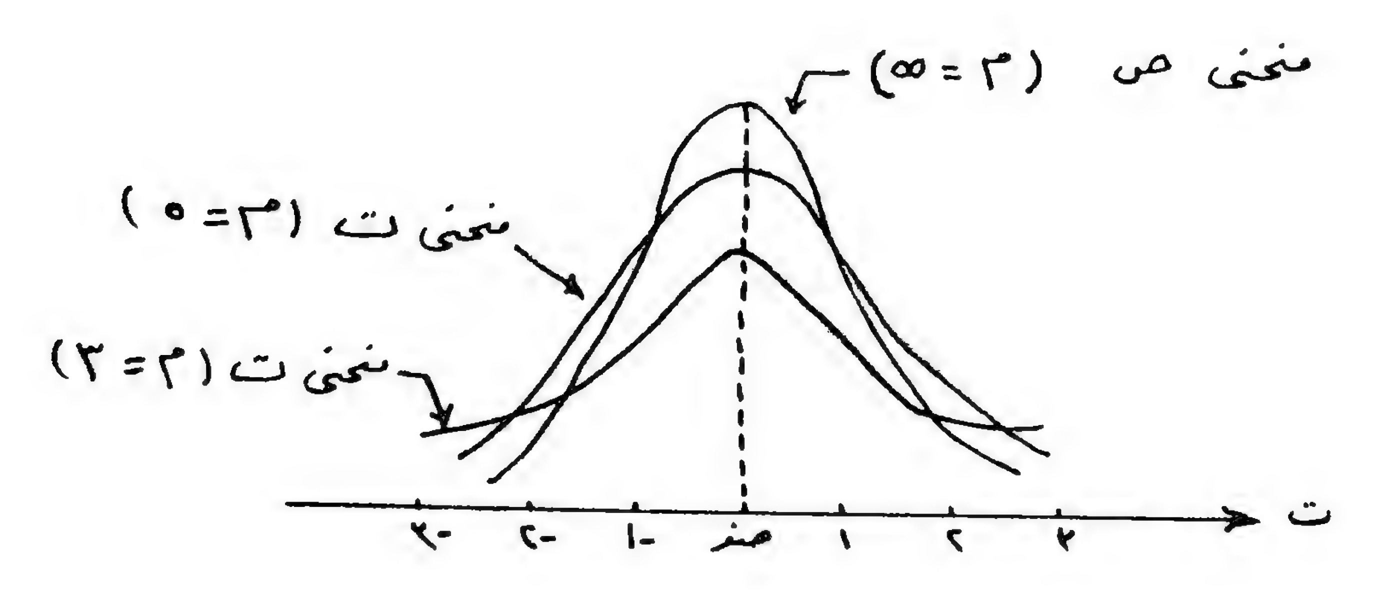
في الكثير من الدراسات الإحصائية وخاصة تلك المتعلقة بتحليل نتائج العينات الصغيرة تظهر الحاجة إلى استخدام توزيع احتمالي جديد يشبه في شكله إلى حد ما شكل التوزيع الطبيعي القياسي (ص) وإن كان يختلف عنه كثيرا . هذا التوزيع الجديد يسمى توزيع « ت » وهو من التوزيعات الاحتمالية المهمة الكثيرة الاستعمال في الدراسات الاحصائية . و يرجع الفضل في اشتقاق هذا التوزيع إلى العالم الأ يرلندي و. س. جوسيت (W. S. Gosset) الذي نشر بحثا في عام ١٩٠٨م اشتق فيه الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع ونظرا لظروف خاصة لم ينشر البحث باسمه ولهذا تحايل على ذلك بنشره تحت اسم مستعار ورمز لهذا التوزيع بالرمز « ت ـ T » .

وكما سبق أن ذكرنا أن منحنى توزيع « ت » مشابه إلى حد ما منحنى التوزيع الطبيعي القياسي « ص » فكلاهما متماثل حول الصفر أي أن لهما نفس المتوسط وهو صفر كما أن كلاهما له شكل ناقوس وكلاهما يأخذ قيما عددية تتراوح بين - ∞ ، + ∞ ولكنهما يختلفان في بعض الخصائص ـ فمثلا تباين التوزيع الطبيعي القياسي مقدار ثابت و يساوي الواحد الصحيح ، بينما توزيع (ت) نجد أن تباينه يساوي $\frac{م}{م - ٢}$ حيث أن م مقدار ثابت يسمى درجات الحرية (وسوف نرى أن م = ن ـ ١ حيث أن « ن » هى حجم العينة وذلك عندما نتكلم عن تحليل العينات الصغيرة في الباب السادس) .

نلاحظ أن تباين توزيع (ت) دائما أكبر من الواحد الصحيح لأن البسط = م والمقام = م ـ ٢ فدائما البسط أكبر من المقام ـ لهذا فان منحنى توزيع (ت) أكثر تشتتا من منحنى التوزيع الطبيعي القياسي ـ وكلما كبرت م كلما اقترب منحى توزيع (ت) من المنحنى الطبيعي القياسى حتى أنه عندما تصبح « م » كبيرة جدا (أي تقترب من ∞) نجد أن منحنى (ت) ينطبق تماما على المنحنى الطبيعى القياسى .

مما سبق يتضح أن منحنى (ت) يتغير تبعا لتغير الثابت « م » المسمى بدرجات الحرية ـ لهذا نجد أنه لكل قيمة من قيم « م » يوجد منحنى معين للمتغير (ت) وفي الشكل التالي نرسم عدة منحنيات للمتغير (ت) عندما م = ٣ ، م = ٥ ، م = ∞ أي م تؤول إلى ∞ بالمقارنة مع منحنى

المتغير الطبيعي القياسي «ص» وسنكتفي في هذه المرحلة بتقديم شكل منحنى توزيع (ت) دون تقديم صيغته الرياضية نظرا لصعوبتها في هذه المرحلة من الدراسة.



يتضح من الشكل السابق تماثل كل المنحنيات حول الصفر ولكن كلما كبرت «م» كلما زاد ارتفاع قمة المنحنى وأصبح أكثر تدببا أي أقل تشتتا، وفي النهاية عندما تصبح (م = ∞) ينطبق المنحنى على منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (ص).

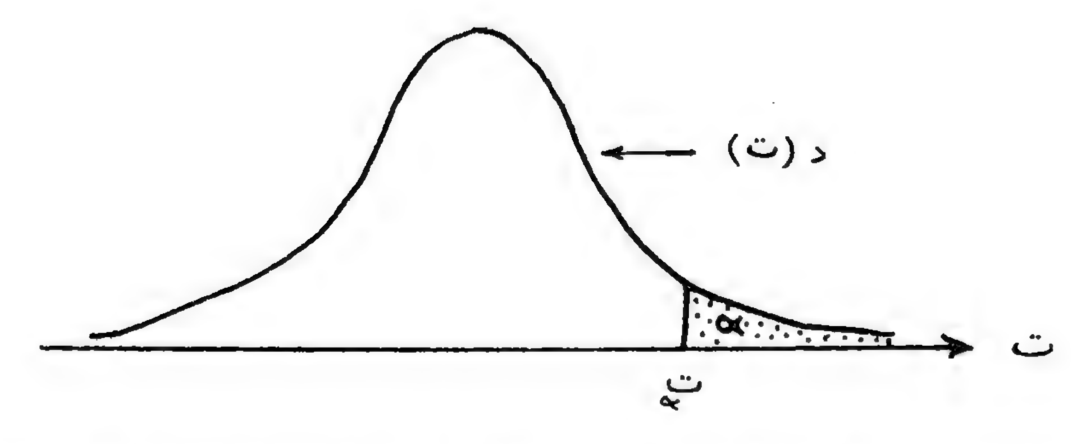
(٣ـ٩) ـ استخدام جداول توزيع «ت»:

لحساب أي احتمالات حول المتغير «ت» يلزمنا وجود جدول يبين المساحات المختلفة تحت منحنى الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع د (ت) والمحصورة بين أي قيمتين من قيم المتغير «ت» كما هو الحال في جداول التوزيع الطبيعي القياسي، ولكن كما نعلم فإنه لكل قيمة من قيم (م) يوجد منحنى للدالة د (ت). وهذا يعني أنه يلزمنا جدول خاص بكل قيمة من قيم (م) وهذه عملية صعبة طويلة وحيث أن الاستخدامات الإحصائية لتوزيع (ت) تعتمد على معرفة قيم المتغير (ت) التي تحصر على يمينها احتمالات معينة ثابتة ـ فيمكن اعتبار ($ت_\alpha$) أنها إحدى قيم المتغير (ت) التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها α فيكون المطلوب هو معرفة قيمة ($ت_\alpha$) بحيث يكون:

$$ح (ت > ت_\alpha) = \alpha$$

وهذا ينص على أن:

احتمال أن المتغير العشوائي (ت) أكبر من القيمة ($ت_\alpha$) يساوي α كما هو مبين في الشكل الآتي:



وتصبح المسألة هى إيجاد قيم ($ت_\alpha$) التي تحصر على يمينها مساحة معينة قدرها « ∝ » و بهذه الطريقة يمكن عمل جدول واحد يعطي قيم ($ت_\alpha$) التي تناظر الاحتمال « ∝ » لدرجات الحرية المختلفة.

ولما كانت الاحتمالات الشائعة الاستخدام هى : —

(∝ = ٥٠٠٠ر٠ ، ٠٠١ر٠ ، ٠٠٢٥ر٠ ، ٠٠٥ر٠ ، ٠١ر٠ ، ٠٢٥ر٠ ،

٠٥ر٠ ، ١ر٠ ، ٢٥ر٠، ٤ر٠) .

لهذا فإن الجدول يعطي قيم ($ت_\alpha$) التي تقابل هذه الاحتمالات لكل درجات الحرية م من ١ إلى ٢٩ وكذلك عندما م = ٣٠، ٤٠، ٦٠، ١٢٠، ∞
و يوضح رأس الجدول قيم (∝) المختلفة كما يوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول هى قيم ($ت_\alpha$).

جدول توزيع (ت)

م	∝ = ٠ر٠٠٠٥	٠ر٠٠١	٠ر٠٠٢٥	٠ر٠٠٥	٠ر٠١	٠ر٠٢٥	٠ر٠٥	٠ر١	٠ر٢٥	٠ر٤
١	٦٣٦ر٦٢	٣١٨ر٣١	١٢٧ر٣٢	٦٣ر٦٥٧	٣١ر٨٢١	١٢ر٧٠٦	٦ر٣١٤	٣ر٠٧٨	١ر٠٠٠	٠ر٣٢٥
٢	٣١ر٥٩٨	٢٢ر٣٢٦	١٤ر٠٨٩	٩ر٩٢٥	٦ر٩٦٥	٤ر٣٠٣	٢ر٩٢٠	١ر٨٨٦	٠ر٨١٦	٠ر٢٨٩
٣	١٢ر٩٢٤	١٠ر٢١٣	٧ر٤٥٣	٥ر٨٤١	٤ر٥٤١	٣ر١٨٢	٢ر٣٥٣	١ر٦٣٨	٠ر٧٦٥	٠ر٢٧٧
٤	٨ر٦١٠	٧ر١٧٣	٥ر٥٩٨	٤ر٦٠٤	٣ر٧٤٧	٢ر٧٧٦	٢ر١٣٢	١ر٥٣٣	٠ر٧٤١	٠ر٢٧١
٥	٦ر٨٦٩	٥ر٨٩٣	٤ر٧٧٣	٤ر٠٣٢	٣ر٣٦٥	٢ر٥٧١	٢ر٠١٥	٠ر٤٧٦	٠ر٧٢٧	٠ر٢٦٧
٦	٥ر٩٥٩	٥ر٢٠٨	٤ر٣١٧	٣ر٧٠٧	٣ر١٤٣	٢ر٤٤٧	١ر٩٤٣	١ر٤٤٠	٠ر٧١٨	٠ر٢٦٥
٧	٥ر٤٠٨	٤ر٧٨٥	٤ر٠٢٩	٣ر٤٩٩	٢ر٩٩٨	٢ر٣٦٥	١ر٨٩٥	١ر١٤٥	٠ر٧١١	٠ر٢٦٣
٨	٥ر٠٤١	٤ر٥٠١	٣ر٨٣٣	٣ر٣٥٥	٢ر٩٨٦	٢ر٣٠٦	١ر٨٦٠	١ر٣٩٧	٠ر٧٠٦	٠ر٢٦٢
٩	٤ر٧٨١	٤ر٢٩٧	٣ر٦٩٠	٣ر٢٥٠	٢ر٨٢١	٢ر٢٦٢	١ر٨٣٣	١ر٣٨٣	٠ر٧٠٣	٠ر٢٦١
١٠	٤ر٥٨٧	٤ر١٤٤	٣ر٥٨١	٣ر١٦٩	٢ر٧٤٦	٢ر٢٢٨	١ر٨١٢	١ر٣٧٢	٠ر٧٠٠	٠ر٢٦٠
١١	٤ر٤٣٧	٤ر٠٢٥	٣ر٣٩٧	٣ر١٠٦	٢ر٧١٨	٢ر٢٠١	١ر٧٩٦	١ر٣٦٣	٠ر٦٩٧	٠ر٢٦٠
١٢	٤ر٣١٨	٣ر٩٣٠	٣ر٤٢٨	٣ر٠٥٥	٢ر٦٨١	٢ر١٧٩	١ر٧٨٢	١ر٣٥٦	٠ر٦٩٥	٠ر٢٥٩
١٣	٤ر٢٢١	٣ر٨٥٢	٣ر٣٧٢	٣ر٠١٢	٢ر٦٥٠	٢ر١٦٠	١ر٧٧١	١ر٣٥٠	٠ر٦٩٤	٠ر٢٥٩
١٤	٤ر١٤٠	٣ر٧٨٧	٣ر٣٢٦	٢ر٩٧٧	٢ر٦٤٢	٢ر١٤٥	١ر٧٦١	١ر٣٤٥	٠ر٦٩٢	٠ر٢٥٨
١٥	٤ر٠٧٣	٣ر٧٣٣	٣ر٢٨٦	٢ر٩٤٧	٢ر٦٠٢	٢ر١٣١	١ر٧٥٣	١ر٣٤١	٠ر٦٩١	٠ر٢٥٨
١٦	٤ر٠١٥	٣ر٦٨٦	٣ر٢٥٢	٢ر٩٢١	٢ر٥٨٣	٢ر١٢٠	١ر٧٤٦	١ر٣٣٧	٠ر٦٩٠	٠ر٢٥٨
١٧	٣ر٩٦٥	٣ر٦٤٦	٣ر٢٢٢	٢ر٨٩٨	٢ر٥٦٧	٢ر١١٠	١ر٧٤٠	١ر٣٣٣	٠ر٦٨٩	٠ر٢٥٧
١٨	٣ر٩٢٢	٣ر٦١٠	٣ر١٩٧	٢ر٨٧٨	٢ر٥٥٢	٢ر١٠١	١ر٧٣٤	١ر٣٣٠	٠ر٦٨٨	٠ر٢٥٧
١٩	٣ر٨٨٣	٣ر٥٧٩	٣ر١٧٤	٢ر٨٦١	٢ر٥٣٩	٢ر٠٩٣	١ر٧٢٩	١ر٣٢٨	٠ر٦٨٨	٠ر٢٥٧

بقية جدول توزيع (ت)

م	α = ٠ر٠٠٠٥	٠ر٠٠١	٠ر٠٠٢٥	٠ر٠٠٥	٠ر٠١	٠ر٠٢٥	٠ر٠٥	٠ر١	٠ر٢٥	٠ر٤
٢٠	٣ر٨٥٠	٣ر٥٥٢	٣ر١٥٣	٢ر٨٤٥	٢ر٥٢٨	٢ر٠٨٦	١ر٧٢٥	١ر٣٢٥	٠ر٦٨٧	٠ر٢٥٧
٢١	٣ر٨١٩	٣ر٥٢٧	٣ر١٣٥	٢ر٨٣١	٢ر٥١٨	٢ر٠٨٠	١ر٧٢١	١ر٣٢٣	٠ر٦٨٦	٠ر٢٥٧
٢٢	٣ر٧٩٢	٣ر٥٠٥	٣ر١١٩	٢ر٨١٩	٢ر٥٠٨	٢ر٠٧٤	١ر٧١٧	١ر٣٢١	٠ر٦٨٦	٠ر٢٥٦
٢٣	٣ر٧٦٧	٣ر٤٨٥	٣ر١٠٤	٢ر٨٠٧	٢ر٥٠٠	٢ر٠٦٩	١ر٧١٤	١ر٣١٩	٠ر٦٨٥	٠ر٢٥٦
٢٤	٣ر٧٤٥	٣ر٤٦٧	٣ر٠٩١	٢ر٧٩٧	٢ر٤٩٢	٢ر٠٦٤	١ر٧١١	١ر٣١٨	٠ر٦٨٥	٠ر٢٥٦
٢٥	٣ر٧٢٥	٣ر٤٥٠	٣ر٠٧٨	٢ر٧٨٧	٢ر٤٨٥	٢ر٠٦٠	١ر٧٠٨	١ر٣١٦	٠ر٦٨٤	٠ر٢٥٦
٢٦	٣ر٧٠٧	٣ر٤٣٥	٣ر٠٦٧	٢ر٧٧٩	٢ر٤٧٩	٢ر٠٥٨	١ر٧٠٦	١ر٣١٥	٠ر٦٨٤	٠ر٢٥٦
٢٧	٣ر٦٩٠	٣ر٤٢١	٣ر٠٥٧	٢ر٧٧١	٢ر٤٧٣	٢ر٠٥٢	١ر٧٠٣	١ر٣١٤	٠ر٦٨٤	٠ر٢٥٦
٢٨	٣ر٦٧٤	٣ر٤٠٨	٣ر٠٤٧	٢ر٧٦٣	٢ر٤٦٧	٢ر٠٤٨	١ر٧٠١	١ر٣١٣	٠ر٦٨٣	٠ر٢٥٦
٢٩	٣ر٦٥٩	٣ر٣٩٦	٣ر٠٣٨	٢ر٧٥٦	٢ر٤٦٢	٢ر٠٤٥	١ر٦٩٩	١ر٣١١	٠ر٦٨٣	٠ر٢٥٦
٣٠	٣ر٦٤٦	٢ر٣٨٥	٣ر٠٣٠	٢ر٧٥٠	٢ر٤٥٧	٢ر٠٤٢	١ر٦٩٧	١ر٣١٠	٠ر٦٨٣	٠ر٢٥٦
٤٠	٣ر٥٥١	٣ر٣٠٧	٢ر٩٧١	٢ر٧٠٤	٢ر٤٢٣	٢ر٠٢١	١ر٦٨٤	١ر٣٠٣	٠ر٦٨١	٠ر٢٥٥
٦٠	٣ر٤٦٠	٣ر٢٣٢	٢ر٩١٥	٢ر٦٦٠	٢ر٣٩٠	٢ر٠٠٠	١ر٦٧١	١ر٢٩٦	٠ر٦٧٩	٠ر٢٥٤
١٢٠	٣ر٣٧٣	٣ر١٦٠	٢ر٨٦٠	٢ر٦١٧	٢ر٣٥٨	١ر٩٨٠	١ر٦٥٨	١ر٢٨٩	٠ر٦٧٧	٠ر٢٥٤
∞	٣ر٢٩١	٣ر٠٩٠	٢ر٨٠٧	٢ر٥٧٦	٢ر٣٢٦	١ر٩٦٠	١ر٦٤٥	١ر٢٨٢	٠ر٦٧٤	٠ر٢٥٣

فيما يلي نعطي بعض الأمثلة التي توضح كيفية استخدام الجدول :

مثال (١٢) : أوجد ما يلي :

١ ــ قيمة تـ التي تجعل ح (ت ≥ تـ) = ٠ر٠٢٥ علما بأن درجات الحرية م = ١٠

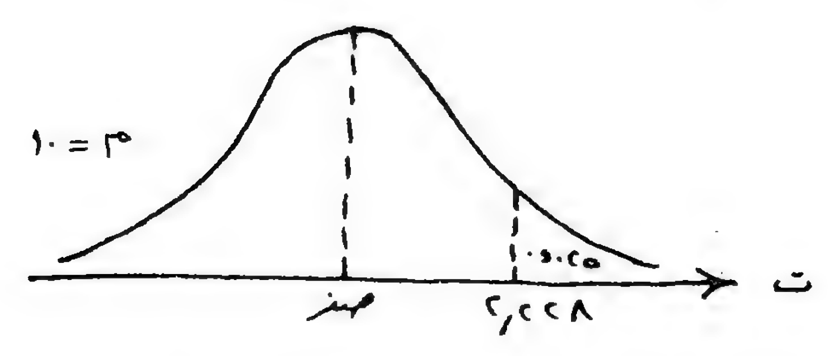
٢ ــ ح (ت٠ر٩٧٥ ≥ ت ≥ ت٠ر٠٥)

٣ ــ قيمة أ التي تجعل ح (أ ≥ ت ≥ − ١ر٧٦١) = ٠ر٠٤٥

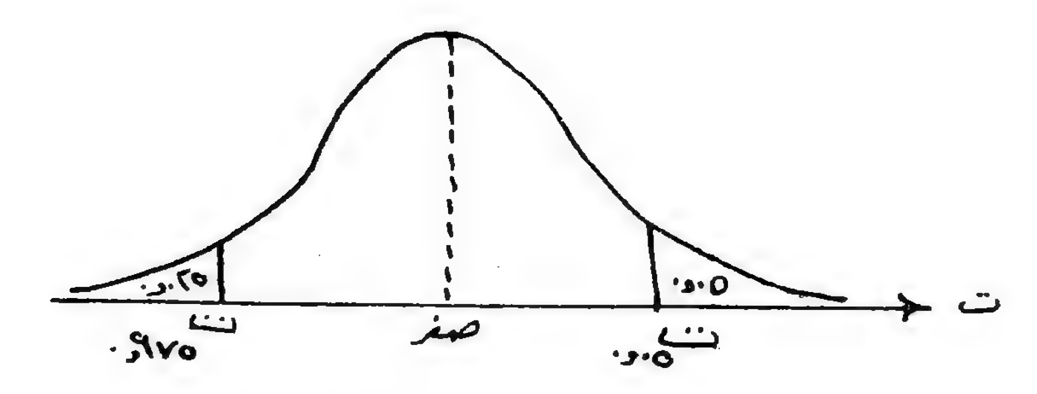
الحل

١ ــ بالبحث في جدول ت عند درجات الحرية م= ١٠ وأسفل الاحتمال α=٠٢٥ر٠ نجد أن قيمة ت من الجدول هي ٢٢٨ر٢ وعلى هذا نجد أن :

$$ت_{\alpha} = ت_{٠٢٥ر٠} = ٢٢٨ر٢$$



٢ ــ برسم د (ت) وتحديد النقطتين $ت_{٩٧٥ر٠}$ ، $ت_{٠٥ر٠}$ لتحديد المساحة المطلوبة .



من الرسم يتضح أن المساحة يسار النقطة $ت_{٩٧٥ر٠}$ هى ٠٢٥ر٠ والمساحة يمين النقطة $ت_{٠٥ر٠}$ هى ٠٥ر٠ إذن المساحة المحصورة بينهما هى باقي المساحة الكلية أي تساوي :

$$١ - (٠٢٥ر٠ + ٠٥ر٠) = ١ - ٠٧٥ر٠ = ٩٢٥ر٠$$

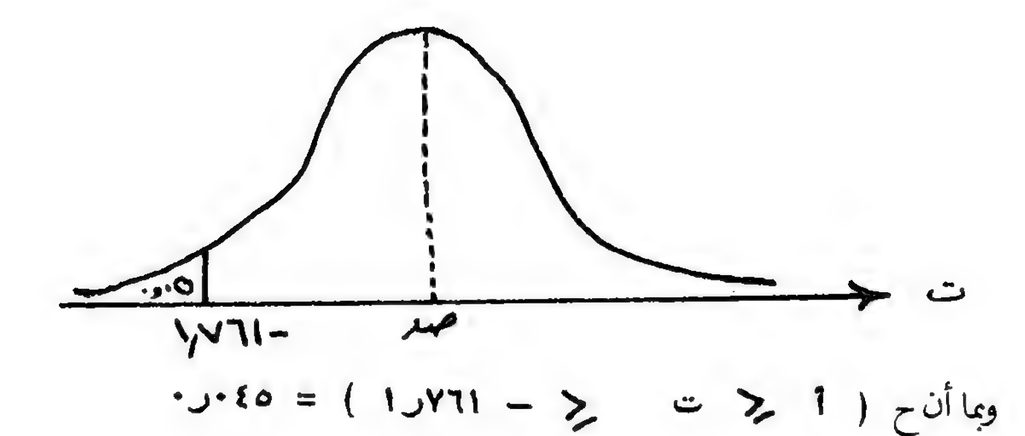
$$\therefore ح (ت_{٩٧٥ر٠} \leqslant ت \leqslant ت_{٠٥ر٠}) = ٩٢٥ر٠$$

وهذه صحيحة لجميع درجات الحرية .

٣ ــ بالبحث داخل جدول ت عن القيمة ٧٦١ر١ أمام درجات الحرية م= ١٤ نجد هذا الرقم أسفل الاحتمال α = ٠٥ر٠

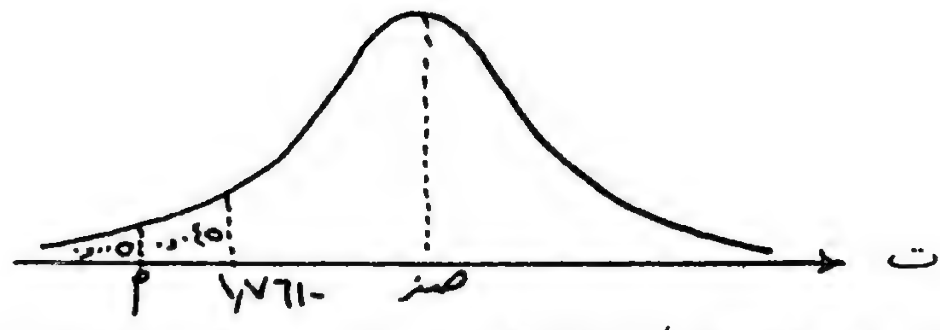
$$\therefore ح (ت > ٧٦١ر١) = ٠٥ر٠$$

ومن خاصية تماثل منحنى الدالة د (ت) نجد أن المساحة على يسار النقطة ــ ٧٦١ر١ تساوي كذلك ٠٥ر٠



وبما أن ح (أ ≤ ت ≤ – ١ر٧٦١) = ٠٤٥ر٠

إذن قيمة أ تقع على يسار النقطة (ــ ١ر٧٦١) والمساحة بينهما ٠٤٥ر٠
ولكن المساحة يسار النقطة (ــ ١ر٧٦١) تساوي ٠٥ر٠
إذن المساحة يسار النقطة أ تساوي ٠٥ر٠ ــ ٠٤٥ر٠ = ٠٠٥ر٠ و يتضح ذلك من الرسم التالي :



من التماثل توجد نقطة تناظر أ تماما ولكن في الجانب الموجب من محور ت وتكون المساحة يمين هذه النقطة تساوي ٠٠٥ر٠ وهذه النقطة تساوي أ في القيمة العددية وتختلف عنها في الإشارة ــ و بالبحث في جدول ت أمام درجات الحرية م = ١٤ وأسفل الاحتمال ∝ = ٠٠٥ر٠ ونجد أن هذه النقطة هى ٢ر٩٧٧ وبما أن هذه النقطة تساوي أ عدديا وتختلف عنها في الإشارة فتكون قيمة أ = ــ ٢ر٩٧٧ .

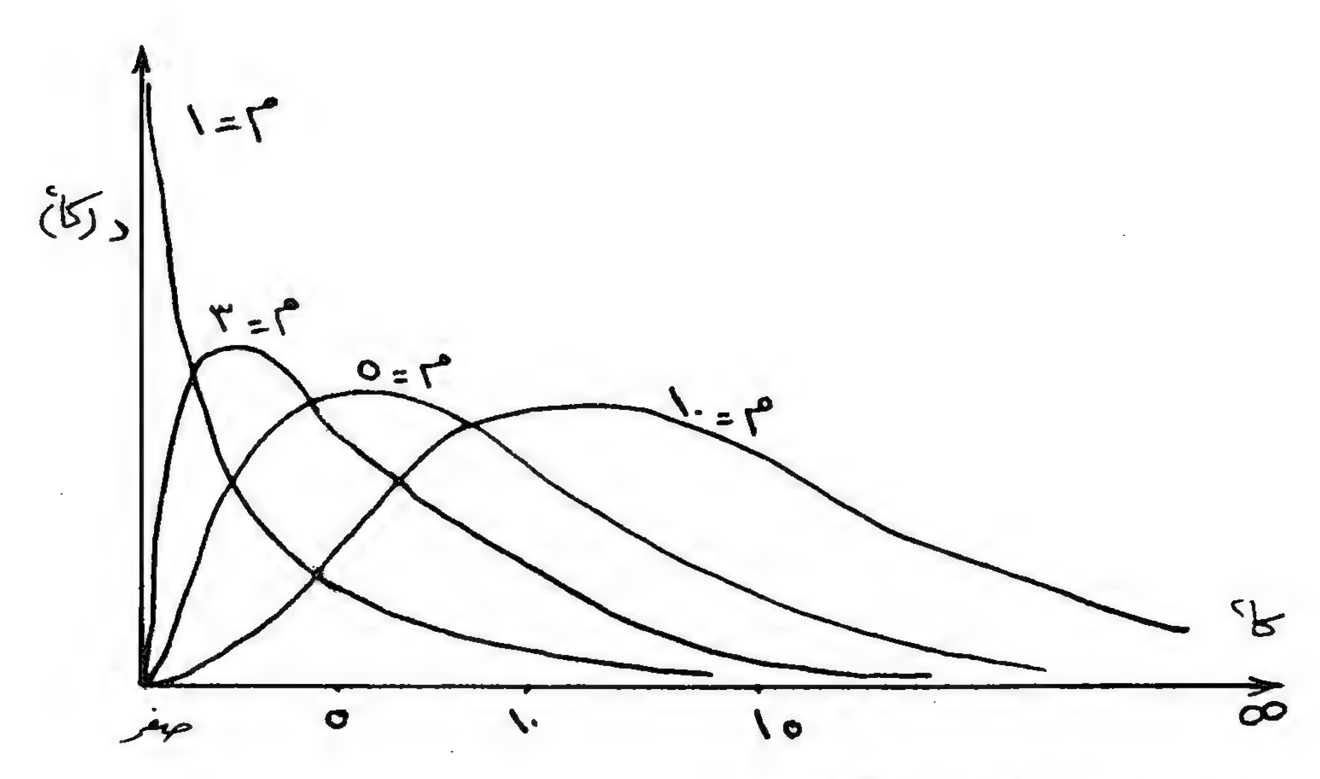
إذن ح (– ٢ر٩٧٧ ≤ ت ≤ – ١ر٧٦١) = ٠٤٥ر٠

خامسا : توزيع كا^2 :

(٣ــ١٠) ــ مقدمة :

يعتبر التوزيع الذي نحن بصدد دراسته الآن والذي نرمز له بالرمز كا^2 من التوزيعات الاحتمالية المهمة التي نحتاج إليها في الكثير من الدراسات الإحصائية، ولن نتناول بالدراسة الصيغة الرياضية لهذا التوزيع د (كا^2) ولكن سنكتفي بفهم طبيعة وشكل هذا التوزيع وذلك برسم المنحنى الذي يمثله وكذلك سنوضح كيفية حساب الاحتمالات أي استخراج المساحات أسفل منحنى هذا التوزيع وذلك باستخدام جدول رياضي خاص يسمى بجدول كا^2 .

ومنحنى هذا التوزيع يختلف عن منحنى التوزيع الطبيعي ومنحنى توزيع (ت) في أنه غير متماثل حول محور معين كما أنه لا يأخذ قيما سالبة وإنما كل قيمة موجبة وتبدأ من الصفر حتى ما لا نهاية. وهذا يعني أن مفردات كا^2 تقع في الفترة صفر $\leqslant$ كا^2 $\leqslant$ ∞ ، كما أن هذا التوزيع يعتمد في تغيره على مقدار ثابت (م) يسمى بدرجات الحرية (كما هو الحال في توزيع «ت») و بالتالي كلما تغيرت قيمة (م) كلما تغير شكل منحنى التوزيع ــ فكلما صغرت درجات الحرية (م) كلما قل التواء التوزيع. والشكل التالي يوضح عدة منحنيات لدالة المتغير العشوائي كا^2 أي للدالة د (كا^2) عندما تكون م = ١ ، م = ٣ ، م = ٥ ، م = ١٠ .



(٣ــ١١) ــ جدول توزيع كا^2 واستخدامه :

لقد أمكن عمل جدول يوضح قيم كا^2 المختلفة ولدرجات الحرية ابتداء من م = ١ حتى م = ٢٩ وكذلك عندما م = ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٠٠ . و يوضح رأس الجدول قيم (α) المختلفة وهى تمثل الاحتمالات الشائعة الاستخدام في توزيع كا^2 وهى الاحتمالات التالية :

α = ٠٠١ر٠ ، ٠٠٥ر٠ ، ٠١٠ر٠ ، ٠٢٥ر٠ ، ٠٥٠ر٠ ، ١٠٠ر٠ ، ٢٥٠ر٠ ، ٥٠٠ر٠ ، ٧٥٠ر٠ ، ٩٠٠ر٠ ، ٩٧٥ر٠ ، ٩٩٠ر٠ ، ٩٩٥ر٠ .

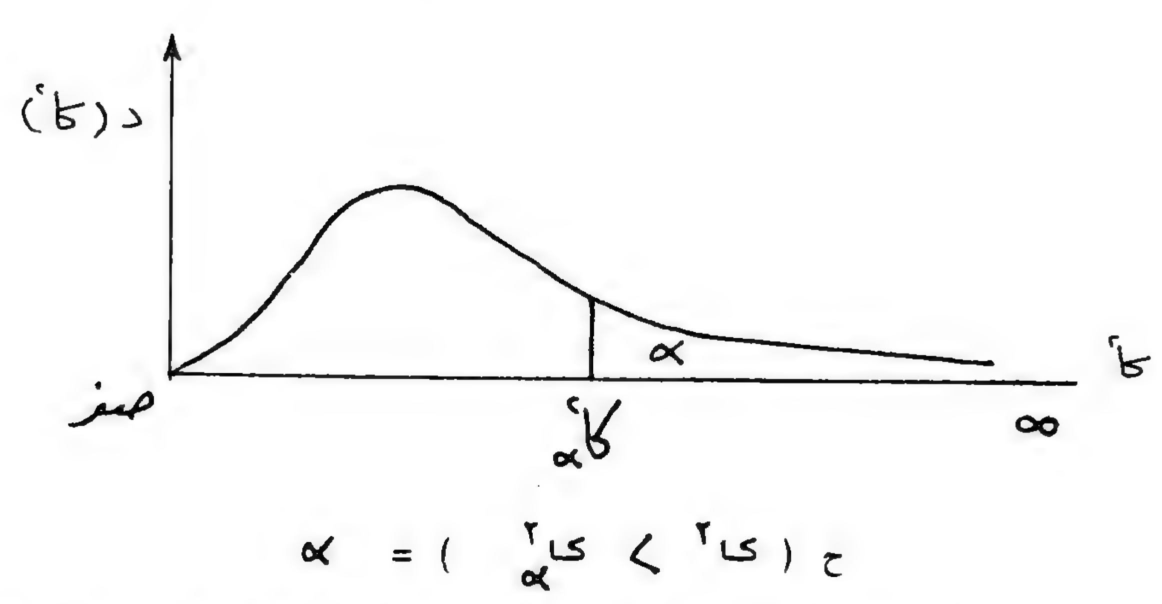
والاحتمالات α التي يوضحها الجدول هى المساحات أسفل منحنى الدالة د (كا^2) وحيث أن

الاستخدامات الإحصائية لتوزيع كا^2 تعتمد على معرفة قيم «كا^2» التي تحصر على يمينها احتمالات معينة قدرها α فيكون المطلوب هو معرفة قيمة «كا^2» التي تحقق الاحتمال التالي:

$$ح\ (\ كا^2 > كا^2_{\alpha}\ ) = \alpha$$

وذلك عند درجة حرية معينة (م).

ويمكن تمثيل المساحة المناظرة لهذا الاحتمال على منحنى كا^2 كما في الشكل التالي:



$$ح\ (\ كا^2 > كا^2_{\alpha}\ ) = \alpha$$

وجدول كا^2 يتكون من صفوف وأعمدة ــ يوضح الصف الأول قيم α المختلفة و يوضح العمود الأول درجات الحرية المختلفة أما محتويات الجدول فهي قيم (كا$^2_{\alpha}$). فمثلا لمعرفة قيمة كا^2 التي تحصر على يمينها احتمالا قدره (١٠ر٠) إذا كانت درجات الحرية ١٥ درجة فإننا نبحث في الجدول عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود α = ٠١ر٠ سنجد أن قيمة كا$^2_{\alpha}$ = ٥٧٧٩ر٣٠.

وفيما يلي نقدم جدول توزيع كا^2:

جدول توزيع كا٢

α / م	٠٫٠٠١	٠٫٠٠٥	٠٫٠١٠	٠٫٠٢٥	٠٫٠٥٠	٠٫١٠٠	٠٫٢٥٠
١	١٠٫٨٢٨	٧٫٨٧٩٤٤	٦٫٦٣٤٩٠	٥٫٠٢٣٨٩	٣٫٨٤١٤٦	٢٫٧٠٥٥٤	١٫٣٢٣٣٠
٢	١٣٫٨١٦	١٠٫٥٩٦٦٠	٩٫٢١٠٣٤	٧٫٣٧٧٧٦	٥٫٩٩١٤٧	٤٫٦٠٥١٧	٢٫٧٧٢٥٩
٣	١٦٫٢٦٦	١٢٫٨٣٨١٠	١١٫٣٤٤٩٠	٩٫٣٤٨٤+	٧٫٨١٤٧٣	٦٫٢٥١٣٩	٤٫١٠٨٣٥
٤	١٨٫٤٦٧	١٤٫٨٦٠٢٠	١٣٫٢٧٦٧٠	١١٫١٤٣٣٠	٩٫٤٨٧٧٣	٧٫٧٧٩٤٤	٥٫٣٨٥٢٧
٥	٢٠٫٥١٥	١٦٫٧٤٩٦	١٥٫٠٨٦٣	١٢٫٨٣٢٥	١١٫٠٧٠٥	٩٫٢٣٦٣٥	٦٫٦٢٥٦٨
٦	٢٢٫٤٥٨	١٨٫٥٤٧٦	١٦٫٨١١٩	١٤٫٤٤٩٤	١٢٫٥٩١٦	١٠٫٦٤٤٦	٧٫٨٤٠٨٠
٧	٢٤٫٣٢٢	٢٠٫٢٧٧٧	١٨٫٤٧٥٣	١٦٫٠١٢٨	١٦٫٠٦٧١	١٢٫٠١٧٠	٩٫٠٣٧١٥
٨	٢٦٫١٢٥	٢١٫٩٥٥٠	٢٠٫٠٩٠٢	١٧٫٥٣٤٦	١٥٫٥٠٧٣	١٣٫٣٦١٦	١٠٫٢١٨٨
٩	٢٧٫٨٧٧	٢٣٫٥٨٩٣	٢١٫٦٦٦٠	١٩٫٠٢٢٨	١٦٫٩١٩٠	١٤٫٦٨٣٧	١١٫٣٨٨٧
١٠	٢٩٫٥٨٨	٢٥٫١٨٨٢	٢٣٫٢٠٩٣	٢٠٫٤٨٣١	١٨٫٣٠٧٠	١٥٫٩٨٧١	١٢٫٥٤٨٩
١١	٣١٫٢٦٤	٢٦٫٧٥٦٩	٢٤٫٧٢٥٠	٢١٫٩٢٠٠	١٩٫٦٧٥١	١٧٫٢٧٥٠	١٣٫٧٠٠٧
١٢	٣٢٫٩٠٩	٢٨٫٢٩٩٥	٢٦٫٢١٧٠	٢٣٫٣٣٦٧	٢١٫٠٢٦١	١٨٫٥٤٩٤	١٤٫٨٤٥٤
١٣	٣٤٫٥٢٨	٢٩٫٨١٩٤	٢٧٫٦٨٨٣	٢٤٫٧٣٥٦	٢٢٫٣٦٢١	١٩٫٨١١٩	١٥٫٩٨٣٩
١٤	٣٦٫١٢٣	٣١٫٣١٩٣	٢٩٫١٤١٣	٢٦٫١١٩٠	٢٣٫٦٨٤٨	٢١٫٠٦٤٢	١٧٫١١٧٠
١٥	٣٧٫٦٩٧	٣٢٫٨٠١٣	٣٠٫٥٧٧٩	٢٧٫٤٨٨٤	٢٤٫٩٩٥٨	٢٢٫٣٠٧٢	١٨٫٢٤٥١
١٦	٣٩٫٢٥٢	٣٤٫٢٦٧٢	٣١٫٩٩٩٩	٢٨٫٨٤٥٤	٢٦٫٢٩٦٢	٢٣٫٥٤١٨	٢٩٫٣٦٨٨
١٧	٤٠٫٧٩٠	٣٥٫٧١٨٥	٣٣٫٤٠٨٧	٣٠٫١٩١٠	٢٧٫٥٨٧١	٢٤٫٧٦٩٠	٢٠٫٤٨٨٧
١٨	٤٢٫٣١٢	٣٧٫١٥٦٤	٣٤٫٨٠٥٣	٣١٫٥٢٦٤	٢٨٫٨٦٩٣	٢٥٫٩٨٩٤	٢١٫٦٠٤٩
١٩	٤٣٫٨٢٠	٣٨٫٥٨٢٢	٣٦٫١٩٠٨	٣٢٫٨٥٢٣	٣٠٫١٤٣٥	٢٣٫٢٠٣٦	٢٢٫٧١٧٨

تابع جدول توزيع كا٢

α / م	٠٫٥٠٠	٠٫٧٥٠	٠٫٩٠٠	٠٫٩٥٠	٠٫٩٧٥	٠٫٩٩٠	٠٫٩٩٥
١	٠٫٤٥٤٩٣٧	٠٫١٠١٥٣٠٨	٠٫٠١٥٧٩٠٨	٣٩٣٢١٤×١٠^{-٨}	٩٨٢٠٦٩×١٠^{-٩}	١٥٧٠٨٨×١٠^{-٩}	٣٩٢٧٠٤×١٠^{-١٠}
٢	١٫٣٨٦٢٩	٠٫٥٧٥٣٦٤	٠٫٢١٠٧٢٠	٠٫١٠٢٥٨٧	٠٫٠٥٠٦٣٥٦	٠٫٠٢٠١٠٠٧	٠٫٠١٠٠٢٤١
٣	٢٫٣٦٥٩٧	١٫٢١٢٥٣٤	٠٫٥٨٤٣٧٥	٠٫٣٥١٨٤٦	٠٫٢١٥٧٩٥	٠٫١١٤٨٣٢	٠٫٠٧١٧٢١٢
٤	٣٫٣٥٦٧٠	١٫٩٢٢٥٥	١٫٠٦٣٦٢٣	٠٫٧١٠٧٢١	٠٫٤٨٤٤١٩	٠٫٢٩٧١١٠	٠٫٢٠٦٩٩٠
٥	١٫٣٥١٤٦	٢٫٦٧٤٦٠	٢٫٦١٠٣١	١٫١٤٥٤٧٦	٠٫٨٣١٢١١	٠٫٥٥٤٣٠٠	٠٫٤١١٧٤٠
٦	٥٫٣٤٨١٢	٣٫٤٥٤٦٠	٢٫٢٠٤١٣	١٫٦٣٥٣٩	١٫٢٣٧٣٤٧	٠٫٨٧٢٠٨٥	٠٫٦٧٥٧٢٧
٧	٦٫٣٤٥٨١	٤٫٢٥٤٨٥	٢٫٨٣٣١١	٢٫١٦٧٣٥	١٫٦٨٩٨٧	١٫٢٣٩٠٤٣	٠٫٩٨٩٢٦٥
٨	٧٫٣٤٤١٢	٥٫٠٧٠٦٤	٣٫٤٨٩٥٤	٢٫٧٣٢٦٤	٢٫١٧٩٧٣	١٫٦٤٦٤٨٢	١٫٣٤٤٤١٩
٩	٨٫٣٤٢٨٣	٥٫٨٩٨٨٣	٤٫١٦٨١٦	٣٫٣٢٥١١	٢٫٧٠٠٣٩	٢٫٠٨٧٩٠٢	١٫٧٣٤٩٢٦
١٠	٩٫٣٤١٨٢	٦٫٧٣٧٢٠	٤٫٨٦٥١٨	٣٫٩٤٠٣٠	٣٫٢٤٦٩٧	٢٫٥٥٨٢١	٢٫١٥٥٨٥
١١	١٠٫٣٤١٠	٧٫٥٨٤١٢	٥٫٥٧٧٧٩	٤٫٥٧٤٨١	٣٫٨١٥٧٥	٣٫٠٥٣٤٧	٢٫٦٠٣٢١
١٢	١١٫٣٤٠٣	٨٫٤٣٨٤٢	٦٫٣٠٣٨٠	٥٫٢٢٦٠٣	٤٫٤٠٣٧٩	٣٫٥٧٠٥٦	٣٫٠٧٣٨٢
١٣	١٢٫٣٣٩٨	٩٫٢٩٩٠٦	٧٫٠٤١٥٠	٥٫٨٩١٨٦	٥٫٠٠٨٧٤	٤٫١٠٦٩١	٣٫٥٦٥٠٣
١٤	١٣٫٣٣٩٣	١٠٫١٦٥٣	٧٫٧٨٩٥٣	٦٫٥٧٠٦٣	٥٫٦٢٨٧٢	٤٫٦٦٠٤٣	٤٫٠٧٤٦٨
١٥	١٤٫٣٣٨٩	١١٫٠٣٦٥	٨٫٥٤٦٧٥	٧٫٢٦٠٩٤	٦٫٢٦٢١٤	٥٫٢٢٩٣٥	٤٫٦٠٠٩٤
١٦	١٥٫٣٣٨٥	١١٫٩١٢٢	٩٫٣١٢٢٣	٧٫٩٦١٦٤	٦٫٩٠٧٦٦	٥٫٨١٢٢١	٥٫١٤٢٢٤
١٧	١٦٫٣٣٨١	١٢٫٧٩١٩	١٠٫٠٨٥٢	٨٫٦٧١٧٦	٧٫٥٦٤١٨	٦٫٤٠٧٧٦	٥٫٦٩٧٢٤
١٨	١٧٫٣٣٧٩	١٣٫٦٧٥٣	١٠٫٨٦٤٩	٩٫٣٩٠٤٦	٨٫٢٣٠٧٥	٧٫٠١٤٩١	٦٫٢٦٤٨١
١٩	١٨٫٣٣٧٦	١٤٫٥٦٢٠	١١٫٦٥٠٩	١٠٫١١٧٠	٨٫٩٠٦٥٥	٧٫٦٣٢٧٣	٦٫٨٤٣٩٨

تابع جدول توزيع كا٢

م / α	٠ر٠٠١	٠ر٠٠٥	٠ر٠١٠	٠ر٠٢٥	٠ر٠٥٠	٠ر١٠٠	٠ر٢٥٠
٢٠	٤٥ر٣١٥	٣٩ر٩٩٦٨	٣٧ر٥٦٦٢	٣٤ر١٦٩٦	٣١ر٤١٠٤	٢٨ر٤١٢٠	٢٣ر٨٢٧٧
٢١	٤٦ر٧٩٧	٤١ر٤٠١٠	٣٨ر٩٣٢١	٣٥ر٤٧٨٩	٣٢ر٦٧٠٥	٢٩ر٦١٥١	٢٤ر٩٣٤٨
٢٢	٤٨ر٢٦٨	٤٢ر٧٩٥٦	٤٠ر٢٨٩٤	٣٦ر٧٨٠٧	٣٣ر٩٢٤٤	٣٠ر٨١٣٣	٢٦ر٠٣٩٣
٢٣	٤٩ر٧٢٨	٤٤ر١٨١٣	٤١ر٦٣٨٤	٣٨ر٠٧٥٧	٣٥ر١٧٢٥	٣٢ر٠٠٦٩	٢٧ر١٤١٣
٢٤	٥١ر١٧٩	٤٥ر٥٥٨٥	٤٢ر٩٧٩٨	٣٩ر٣٦٤١	٣٦ر٤١٥١	٣٣ر١٩٦٣	٢٨ر٢٤١٢
٢٥	٥٢ر٦٢٠	٤٦ر٩٢٧٨	٤٤ر٣١٤١	٤٠ر٦٤٦٥	٣٧ر٦٥٢٥	٣٤ر٣٨١٦	٢٩ر٣٣٨٩
٢٦	٥٤ر٠٥٢	٤٨ر٢٨٩٩	٤٥ر٦٤١٧	٤١ر٩٢٣٢	٣٨ر٨٨٥٢	٣٥ر٥٦٣١	٣٠ر٤٣٤٥
٢٧	٥٥ر٤٧٦	٤٩ر٦٤٤٩	٤٦ر٩٦٣٠	٤٣ر١٩٤٤	٤٠ر١١٣٣	٣٦ر٧٤١٢	٣١ر٥٢٨٤
٢٨	٥٦ر٨٩٢	٥٠ر٩٩٣٣	٤٨ر٢٧٨٢	٤٤ر٤٦٠٧	٤١ر٣٣٧٢	٣٧ر٩١٥٩	٣٢ر٦٢٠٥
٢٩	٥٨ر٣٠٢	٥٢ر٣٣٥٦	٤٩ر٥٨٧٩	٤٥ر٧٢٢٢	٤٢ر٥٥٦٩	٣٩ر٠٨٧٥	٣٣ر٧١٠٩
٣٠	٥٩ر٧٠٣	٥٣ر٦٣٢٠	٥٠ر٨٩٢٢	٤٦ر٩٧٩٢	٤٣ر٧٧٢٩	٤٠ر٢٥٦٠	٣٩ر٧٩٩٨
٤٠	٧٣ر٤٠٢	٦٦ر٧٦٥٩	٦٣ر٦٩٠٧	٥٩ر٣٤١٧	٥٥ر٧٥٨٥	٥١ر٨٠٥٠	٤٥ر٦١٦٠
٥٠	٨٦ر٦٦١	٧٩ر٤٩٠٠	٧٦ر١٥٣٩	٧١ر٤٢٠٢	٦٧ر٥٠٤٨	٦٣ر١٦٧١	٥٦ر٣٣٣٦
٦٠	٩٩ر٦٠٧	٩١ر٩٥١٧	٨٨ر٣٧٩٤	٨٣ر٢٩٧٦	٧٩ر٠٨١٩	٧٤ر٣٩٧٠	٦٦ر٩٨١٤
٧٠	١١٢ر٣١٧	١٠٤ر٢١٥	١٠٠ر٤٢٥	٩٥ر٠٢٣١	٩٠ر٥٣١٢	٨٥ر٥٢٧١	٧٧ر٥٧٦٦
٨٠	١٢٤ر٨٣٩	١١٦ر٣٢١	١١٢ر٣٢٩	١٠٦ر٦٢٩	١٠١ر٨٧٩	٩٦ر٥٧٨٢	٨٨ر١٣٠٣
٩٠	١٣٧ر٢٠٨	١٢٨ر٢٩٩	١٢٤ر١١٦	١١٨ر١٣٦	١١٣ر١٤٥	١٠٧ر٥٦٥	٩٨ر٦٤٩٩
١٠٠	١٤٩ر٤٤٩	١٤٠ر١٦٩	١٣٥ر٨٠٧	١٢٩ر٥٦١	١٢٤ر٣٤٢	١١٨ر٤٩٨	١٠٩ر١٤١

تابع جدول توزيع كا٢

م \ α	٠ر٥٠٠	٠ر٧٥٠	٠ر٩٠٠	٠ر٩٥٠	٠ر٩٧٥	٠ر٩٩٠	٠ر٩٩٥
٢٠	١٩ر٣٣٧٤	١٥ر٤٥١٨	١٢ر٤٤٢٦	١٠ر٨٥٠٨	٩ر٥٩٠٨٣	٨ر٢٦٠٤٠	٧ر٤٣٣٨٦
٢١	٢٠ر٣٣٨٢	١٦ر٣٤٤٤	١٣ر٢٣٩٦	١١ر٥٩١٣	١٠ر٢٨٢٩٣	٨ر٨٩٧٢٠	٨ر٠٣٣٦٦
٢٢	٢١ر٣٣٧٠	١٧ر٢٣٩٦	١٤ر٠٤١٥	١٢ر٣٣٨٠	١٠ر٩٨٢٣	٩ر٥٤٢٤٩	٨ر٦٤٢٧٢
٢٣	٢٢ر٣٣٦٩	١٨ر١٣٧٣	١٤ر٨٤٧٩	١٣ر٠٩٠٥	١١ر٦٨٨٥	١٠ر١٩٥٦٧	٩ر٢٦٠٤٢
٢٤	٢٣ر٣٦٦٧	١٩ر٠٣٧٢	١٥ر٦٥٨٧	١٣ر٨٤٨٤	١٢ر٤٠١١	١٠ر٨٥٦٤	٩ر٨٨٦٢٣
٢٥	٢٤ر٣٣٦٦	١٩ر٩٣٩٣	١٦ر٤٧٣٤	١٤ر٦١١٤	١٣ر١١٩٧	١١ر٥٢٤٠	١٠ر٥١٩٧
٢٦	٢٥ر٣٣٦٤	٢٠ر٨٤٣٤	١٧ر٢٩١٩	١٥ر٣٧٩١	١٣ر٨٤٣٩	١٢ر١٩٨١	١١ر١٦٠٣
٢٧	٢٦ر٣٣٦٣	٢١ر٧٤٩٤	١٨ر١١٣٨	١٦ر١٥١٣	١٤ر٥٧٣٣	١٢ر٨٧٨٦	١١ر٨٠٧٦
٢٨	٢٧ر٣٣٦٣	٢٢ر٦٥٧٢	١٨ر٩٣٩٢	١٦ر٩٢٧٩	١٥ر٣٠٧٩	١٣ر٥٦٤٨	١٢ر٤٦١٣
٢٩	٢٨ر٣٣٦٢	٢٣ر٥٦٦٦	١٩ر٧٦٧٧	١٧ر٧٠٨٣	١٦ر٠٤٧١	١٤ر٢٥٦٥	١٣ر١٢١١
٣٠	٢٩ر٣٣٦٠	٢٤ر٤٧٧٦	٢٠ر٥٩٩٢	١٨ر٤٩٢٦	١٦ر٧٩٠٨	١٤ر٩٥٣٥	١٣ر٧٨٦٧
٤٠	٣٩ر٣٣٥٤	٣٣ر٦٦٠٣	٢٩ر٠٥٠٥	٢٦ر٥٠٩٣	٢٤ر٤٣٣١	٢٢ر١٦٤٣	٢٠ر٧٠٦٥
٥٠	٤٩ر٣٣٤٩	٤٢ر٩٤٢١	٣٧ر٦٨٨٦	٣٤ر٧٦٤٢	٣٢ر٣٥٧٤	٢٩ر٧٠٦٧	٢٧ر٩٩٠٧
٦٠	٥٩ر٣٣٤٧	٥٢ر٢٦٣٨	٤٦ر٤٥٨٩	٤٣ر١٨٧٩	٤٠ر٤٨١٧	٣٧ر٤٨٤٨	٣٥ر٥٣٤٦
٧٠	٦٩ر٣٣٤٤	٦١ر٦٩٨٣	٥٥ر٣٢٩٠	٥١ر٧٣٩٣	٤٨ر٧٥٧٦	٤٥ر٤٤١٨	٤٣ر٢٧٥٢
٨٠	٧٩ر٣٣٤٣	٧١ر١٤٤٥	٦٤ر٢٧٧٨	٦٠ر٣٩١٥	٥٧ر١٥٣٢	٥٣ر٥٤٠٠	٥١ر١٧٢٠
٩٠	٨٩ر٣٣٤٢	٨٠ر٦٢٤٧	٧٣ر٢٩١٢	٦٩ر١٢٦٠	٦٥ر٦٤٦٦	٦١ر٧٥٤١	٥٩ر١٩٦٣
١٠٠	٩٩ر٣٣٤١	٩٠ر١٣٣٢	٨٢ر٣٥٨٠	٧٧ر٩٢٩٥	٧٤ر٢٢١٩	٧٠ر٠٦٤٨	٦٧ر٣٢٧٦

فيما يلي بعض الأمثلة التي تبين كيفية استخدام جداول كا^2.

مثال (١٣) : إذا كان لدينا متغير عشوائي له توزيع كا^2 فأوجد قيمة كا^2 التي تجعل :

١ - ح (كا^2 > كا$^2_\alpha$) = ٠٫٠٥

٢ - ح (كا^2 > كا$^2_\alpha$) = ٠٫٩٩

وذلك إذا كانت درجات الحرية كما يلي :

أولا : م = ٥

ثانيا: م = ١٥

الحل

أولا : إذا كانت م = ٥

١ - ح (كا^2 > كا$^2_\alpha$) = ٠٫٠٥

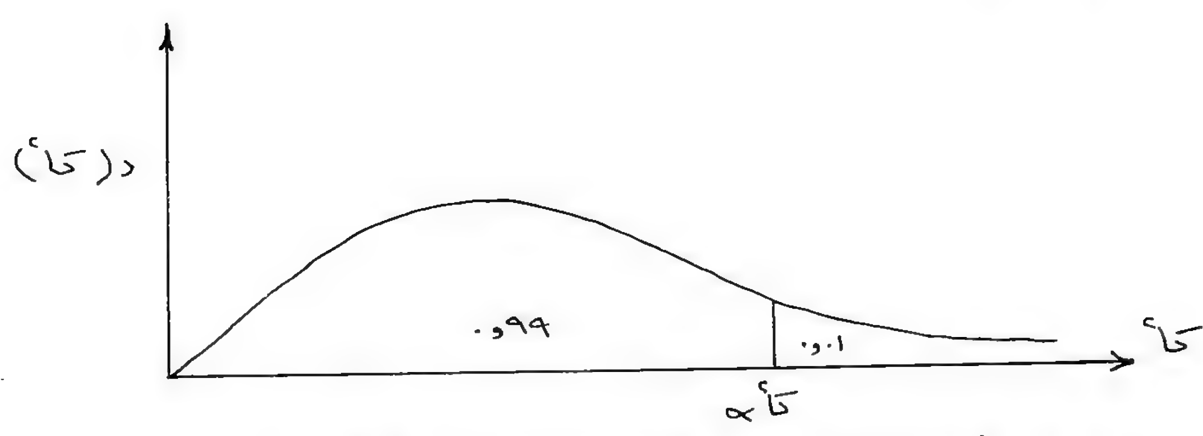
قيمة كا$^2_\alpha$ التي تحقق الاحتمال السابق هى كا$^2_{٠٫٠٥}$ وهى تلك القيمة الموجودة في جدول كا^2 عند تقاطع الصف م = ٥ مع العمود α = ٠٫٠٥ و بقراءتها من الجدول نجد أن :

كا$^2_{٠٫٠٥}$ = ١١٫٠٧٠٥

٢ - إذا كان ح (كا^2 > كا$^2_\alpha$) = ٠٫٩٩

فان ح (كا^2 < كا$^2_\alpha$) = ٠٫٠١

وذلك كما يتضح من الرسم التالي :



وعلى هذا فأن قيمة كا$^2_\alpha$ التي تحقق الاحتمال السابق هى كا$^2_{٠٫٠١}$ وهى تلك القيمة الموجودة في جدول كا^2 عند تقاطع الصف م = ٥ مع العمود = ٠٫٠١ و بالتالي فهى

كا$^2_\alpha$ = كا$^2_{٠٫٠١}$ = ١٥٫٠٨٦٣

ثانيا : إذا كانت م = ١٥

مثل الحالة السابقة تماما ما عدا أن الصف الذي نبحث عنه في الجدول قد تغير فأصبح عند م =

١٥ بدلا من م = ٥ و بهذا تكون :

١ ــ $\text{كا}^{2}_{\alpha} = \text{كا}^{2}_{٠٫٠٥}$ هى قيمة كا^{2} الواقعة عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود α = ٠ر٠٥ وتكون $\text{كا}^{2}_{\alpha} = \text{كا}^{2}_{٠٫٠٥}$ = ٢٤ر٩٩٥٨

٢ ــ $\text{كا}^{2}_{\alpha} = \text{كا}^{2}_{٠٫٠١}$ هى قيمة كا^{2} الواقعة عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود α = ٠ر٠١ وتكون $\text{كا}^{2}_{\alpha} = \text{كا}^{2}_{٠٫٠١}$ = ٣٠ر٥٧٧٩

تمارين

١ ــ

إذا كان احتمال أن يفوز فريق كرة قدم في مباراة هو $\frac{٢}{٣}$. فما هو احتمال أن يفوز هذا الفريق في ٤ مباريات على الأقل إذا لعب ٦ مباريات ؟

٢ ــ

في عائلة بها ٦ أطفال ، إذا كان احتمال ولادة مولود ذكر ٠ر٥٢ ، فما هو احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة ؟

٣ ــ

في مصنع للمصابيح الكهربائية ، تبين أن من بين كل ١٠٠٠ مصباح منتجة ١٠٠ مصباح غير صالحة للاستعمال . سحبت عشوائيا عينة من المصابيح مكونة من ١٠ مصابيح ، احسب الاحتمالات الآتية :

(أ) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة صالحة للاستعمال .

(ب) أن تكون جميع المصابيح المسحوبة غير صالحة للاستعمال .

(جـ) أن يكون من بين المصابيح المسحوبة مصباح واحد على الأقل صالح للاستعمال .

٤ ــ

اشترى شخص صندوقا به ثلاث بطيخات . فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو ٠ر٣ فاحسب احتمال أن تكون :

(أ) جميعها طيبة .

(ب) واحدة تالفة .

٥ ــ

إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على إحدى الطرق هو ٣ حوادث . فما احتمال وقوع ٤ حوادث في أحد الأيام ؟

٦ـ

• إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو ٨ر٠ احسب احتمال وقوع زلزالين في أحد السنين.

٧ـ

• إذا كان متوسط عدد الحرائق الشهرية في إحدى المدن الكبرى هو ٤ حرائق فما احتمال أن يقع فى أحد الشهور:

(I) ثلاثة حرائق　　(II) ثلاثة حرائق على الأكثر

٨ـ

إذا كان متوسط عدد الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق في مدينة ما هو ٤ حوادث، فما احتمال وقوع:

(I) حادثتين ؟　　(II) حادثتين على الأقل ؟

(III) حادثتين على الأكثر ؟

٩ـ

• إذا كان متوسط أطوال مجموعة كبيرة من الطلبة = ١٦٠ سم وانحرافه المعياري ٥ سم. أوجد الاحتمالات الآتية:

(أ) الحصول على طالب طوله أكبر من ١٧٥ سم.

(ب) الحصول على طالب طوله أقل من ١٦٢ سم.

(جـ) الحصول على طالب طوله ينحصر بين ٥ر١٥٧ سم، ٥ر١٦٧ سم.

١٠ـ

تقدم ٣٠٠ شاب لإدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع توزيعا طبيعيا وسطه = ١٧٠ سم وانحرافه المعياري = ٨ سم. أوجد عدد الأشخاص المقبولين للتجنيد إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٦ سم.

١١ـ إذا كان دخل ٦٠٠ أسرة في مدينة ما يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٣٦٠٠ ريال وانحرافه المعياري ٦٠٠ ريال. فاوجد:

(أ) احتمال الحصول على دخل أكبر من ٨٠٠ ريال.

(ب) احتمال الحصول على دخل يقل عن ٥١٠٠ ريال.

(جـ) عدد الأسر التي يقل دخلها عن ٢٤٠٠ ريال.

١٢ ـ إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع «ت» بدرجات حرية م = ٩ فأوجد قيم ت$_1$ ، ت$_2$ التي تحقق الاحتمالات الآتية:

أ ـ ح (س > ت$_1$) = ٠ر٠٥

ب ـ ح (س < ت$_2$) = ٠ر٠٥

جـ ـ ح (ت$_1$ < س < ت$_2$) = ٠ر٩٥

د ـ ح (ت$_1$ < س < ت$_2$) = ٠ر٩٩

١٣ ـ أوجد قيم ت$_\alpha$ التي تجعل ح (ت > ت$_\alpha$) = ٠ر٠٥ وذلك في الحالات الآتية:

أ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ١٦

ب ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٢٥

جـ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ∞

١٤ ـ ما هي قيم ت ١ ، ت ٢ ، التي تجعل ح (ت$_1$ < ت < ت$_2$) = ٠ر٩٥ وذلك في الحالات الآتية:

أ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٩

ب ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٢٠

جـ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠

د ـ قارن بين الحالات السابقة مع القيم المماثلة في حالة التوزيع الطبيعي القياسي.

١٥ ـ إذا كان س متغيرا عشوائيا له توزيع كا^2 فأوجد قيم كا^2 التي تحقق الاحتمالات الآتية:

١ ـ ح (س > كا$^2_\alpha$) = ٠ر٠٢٥

٢ ـ ح (س < كا$^2_\alpha$) = ٠ر٩٩٥

٣ ـ ح (كا$^2_{\alpha_1}$ < س < كا$^2_{\alpha_2}$) = ٠ر٠٤

وذلك في ضوء الجدول المتاح لديك وفي الحالات التالية:

أ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٦

ب ـ عندما تكون درجات الحرية م = ١٦

جـ ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٢٧

د ـ عندما تكون درجات الحرية م = ٣٠

الباب الرابع

العينات

العينات

(٤ـ١) ـ مقدمة :

يعتبر أسلوب المعاينة من أهم الأساليب الإحصائية التي نستخدمها لدراسة مجموعة كبيرة من المفردات (تسمى مجتمع) بقصد التعرف على خواصها عن طريق دراسة مجموعة صغيرة من هذه المفردات (تسمى عينة) . إن الصعوبات التي تصادف الباحثين عند دراسة جميع مفردات المجتمع (خاصة إذا كان هذا المجتمع كبيرا) تجعل الباحثين يلجأون عادة إلى اختيار مجموعة صغيرة (تسمى عينة) يتم اختيارها من المجتمع بطريقة معينة بحيث تكون هذه المجموعة صورة مصغرة للمجتمع بقدر الإمكان ثم يقومون بدراسة هذه العينة بدقة للتعرف على خواصها ومعرفة معالمها مثل الوسط الحسابي والوسيط وغير ذلك من المقاييس الإحصائية ثم يقومون بتعميم النتائج التي يحصلون عليها إلى المجتمع الأصلي للتعرف على خواصه ومعالمه وهذا هو الهدف الأساسي من الدراسة . و بالطبع لا يكون هذا التعميم من العينة إلى المجتمع له معنى أو قيمة علمية إلا إذا تم اختيار المفردات بطريقة نضمن بها أن تكون العينة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا ومثل هذه العينات يطلق عليها اسم العينات العشوائية . ونلاحظ أنه عند دراسة خصائص المجتمعات يوجد أمامنا أسلوبان لجمع المعلومات وهما :

(أ) جمع البيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع وهذا يسمى بأسلوب الحصر الشامل .

(ب) نختار عينة من المجتمع ونحصل منها على المعلومات التي تلزمنا وندرس خصائصها ونعمم النتائج التي نحصل عليها على المجتمع الأصلي وهذا يسمى بأسلوب العينة .

ولا شك أن لكل من هذين الأسلوبين مزاياه وعيوبه ـ فأسلوب الحصر الشامل يتطلب منا وفرة من الوقت والمال والمجهود الفني وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما كبر حجم المجتمع . و بالإضافة إلى ذلك فقد رأينا في دراستنا لمبادىء الإحصاء عند حساب المقاييس الإحصائية المختلفة كيف أن العمل الحسابي يزداد مشقة كلما كبر عدد المفردات الداخلة في البحث . هذا غير ما يتطلبه الحصول على البيانات من وقت وجهد وتكاليف لهذا نجد أن الحصر الشامل لكل مفردات المجتمع قد يعرض البيانات للخطأ والإهمال سواء في عملية تصميم البحث أو أثناء جمع البيانات أو أثناء حساب المقاييس الإحصائية ولكن إذا توفر لنا المال اللازم لاستخدام جامعي البيانات المدربين والمشرفين الأكفاء على جامعي البيانات وتوفر كذلك الوقت والإمكانيات اللازمة لفحص كل مفردات المجتمع ولإجراء كافة العمليات الحسابية المطلوبة فإننا بلا شك نستطيع بالحصر

الشامل أن نحصل على صورة حقيقية عن المجتمع الذي ندرسه . ولكن في الواقع لا نستطيع دائما توفير كل هذه المقومات من مال ووقت ووسائل فنية وعادة ما نواجه بنقص فيها و بالتالي نتعرض للعديد من الأخطاء سواء في تصميم البحث أو في جمع البيانات أو في العمل الحسابي وهذه الأخطاء تسمى بأخطاء التحيز، وقد يتبادر للذهن أن الحصر الشامل يجنبنا الأخطاء لأننا نقوم بدراسة جميع مفردات المجتمع ولكننا وجدنا أن الحصر الشامل عرضة لخطأ التحيز الذي يزداد حجمه كلما ازداد الفرق بين الإمكانيات اللازمة والإمكانيات المتوفرة لدراسة المجتمع . ومن هنا ظهرت فكرة العينات وهى أننا نأخذ مجموعة صغيرة من مفردات المجتمع نختارها بطريقة عشوائية بحيث تكون هذه العينة صورة مصغرة للمجتمع وفي نفس الوقت يكون عدد مفرداتها صغيرا يمكن التحكم فيه ويمكن تدبير الوقت والمال والوسائل الفنية اللازمة لدراسته بحيث يمكن أن نحصر خطأ التحيز في أضيق الحدود . ومما لا شك فيه أن خطأ التحيز في دراسة العينة أقل بكثير منه في دراسة جميع مفردات المجتمع .

وليس معنى هذا أن تكون نتائج أسلوب العينة أفضل دائما من نتائج أسلوب الحصر الشامل فأسلوب العينة يكون عرضة لنوع آخر من الخطأ يسمى خطأ الصدفة وهو ذلك الخطأ الناتج عن دراسة جزء من المجتمع (هى العينة) تدخلت عوامل الصدفة بصورة كبيرة في طريقة اختياره و بالتالي فإن الصدفة وحدها هى التي قد تجعل هذا الجزء ممثلا تمثيلا صادقا للمجتمع وهى التي قد تجعل هذا التمثيل غير صادق أو غير حقيقي . هذا ينعكس على تعميم النتائج من العينة إلى المجتمع .

معنى هذا أن الحصر الشامل يتعرض لنوع واحد من الخطأ . هو خطأ التحيز بينما تتعرض العينة لنوعين من الخطأ وهما خطأ الصدفة وخطأ التحيز. ولكن في كثير من الأحيان يمكن التحكم في خطأ التحيز الذي تتعرض له العينة بحيث يصبح مجموع خطأي الصدفة والتحيز في العينة أقل بكثير من خطأ التحيز الذي يتعرض له الحصر الشامل وهذا ما يدفعنا إلى استخدام العينات في العديد من الدراسات .

مثال ذلك إذا أردنا معرفة متوسط الأجر لعمال صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات . فإن أسلوب الحصر الشامل يتطلب منا الحصول على معلومات عن كل عامل من عمال هذه الصناعة وهذا يتطلب وقتا وجهدا كبيرين وخاصة إذا كان عدد العمال في هذه الصناعة كبيرا أو كانت مصانع النسيج منتشرة في مناطق متفرقة متباعدة و يتحتم علينا في الحصر الشامل مقابلة كل عامل على حدة وسؤاله عن أجره وتسجيل ما نحصل عليه من بيانات ثم تجميع هذه البيانات وتحليلها لاستخلاص ما نريده من معلومات وحساب متوسط الأجر. في مثل هذه الحالات نجد أن أسلوب الحصر الشامل يكبدنا مشقة وتكاليف باهظة ويحتاج إلى وقت ومجهود كبيرين فضلا عن أننا قد نقع في خطأ التحيز مما يترتب عليه أننا لا نحصل على المتوسط الحقيقي للأجر بعد كل ما نواجهه من مشقة .

لهذا فإننا نلجأ إلى أسلوب العينة وذلك باختيار عينة عشوائية من عمال هذه الصناعة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صادقا للمجتمع أو تعتبر صورة مصغرة. منه. ثم نقوم بسؤال كل عامل في هذه العينة وتسجيل البيانات التي نحصل عليها منه ثم نحسب متوسط الأجر في العينة فإذا وجدنا متوسط الأجر في العينة هو ثلاثة آلاف ريال في الشهر. وحيث أن العينة تعتبر صورة مصغرة للمجتمع فإنه يمكننا أن نستنتج أن متوسط الأجر بين كل عمال هذه الصناعة في حدود ثلاثة آلاف ريال تقريبا والنتيجة التي توصلنا إليها هذه بالنسبة لمتوسط الأجر بين عمال الصناعة كلها تعتبر نتيجة احتمالية غير مؤكد تأكيدا كاملا لهذا يجب علينا معرفة مدى ثقتنا في صحة هذه النتيجة. ولقياس درجة هذه الثقة فإنا نستخدم الاحتمالات وهذا هو أحد الأسباب في تكريس الفصول السابقة لنظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية وإذا كانت نظرية الاحتمالات فرع من فروع الرياضة البحتة فإن دراسة العينات واستخدامها للاحتمالات تدخل بنا إلى صلب الطرق الإحصائية والتي سندرس جزءا منها في الأبواب التالية:

ومما هو جدير بالذكر أن التغلب على خطأ التحيز ليس هو السبب الوحيد الذي يجعلنا نلجأ إلى استخدام العينات وإنما هناك أسباب أخرى كثيرة نذكر منها مثلا ما يلي:

(١) عندما يؤدي أسلوب الحصر الشامل إلى تدمير كل مفردات المجتمع المدروس مثل محاولة معرفة متوسط عمر المصابيح الكهربائية التي ينتجها مصنع معين، إذ يتطلب أسلوب الحصر الشامل إضاءة كل مصباح من إنتاج المصنع حتى يحترق لمعرفة عمره وهذا يترتب عليه تدمير كل إنتاج المصنع ولهذا لابد من اللجوء إلى أسلوب العينة لمثل هذه الدراسة ــ كذلك عند دراسة تركيب دم الإنسان لا يعقل استخدام أسلوب الحصر الشامل الذي يؤدي إلى سحب كل دم الإنسان.

(٢) عندما يتعذر تحديد جميع مفردات المجتمع لإجراء حصر شامل مثل دراسة أذواق المستهلكين لسلعة معينة لإدخال بعض التعديلات على إنتاج هذه السلعة. في هذه الحالة يصعب علينا تحديد كل المستهلكين لها لهذا نلجأ إلى أخذ عينة من المستهلكين.

وفي ختام هذه المقدمة يجب الإشارة إلى أنه في حالة توفر كل الإمكانيات اللازمة لدراسة المجتمع من وقت وجهد ومال ووسائل فنية يكون أسلوب الحصر الشامل أفضل من أسلوب العينة كما يحدث في حالة التعدادات العامة للسكان ــ أما عند نقص هذه الإمكانيات فيكون أسلوب العينة هو الأفضل. وقد انتشر استخدام العينات في معظم الدراسات الإقتصادية والإجتماعية والسكانية والعلمية ومراقبة الإنتاج وغير ذلك من المجالات.

(٤ــ٢) ــ بعض أنواع العينات العشوائية:

سنتناول الآن بالدراسة بعض أنواع العينات العشوائية وطريقة الاختيار لكل منها:

(١) العينات العشوائية البسيطة:

هى العينات التي يراعى عند إختيارها تكافؤ الفرص أمام كل مفردات المجتمع . بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متساو ية مع بقية المفردات لاختيارها في العينة و يتم ذلك عن طريق الاختيار العشوائي لمفردات العينة من بين مفردات المجتمع . ولهذا يجب معرفة المفاهيم التالية:

(أ) الإطار :

حتى يمكن اختيار العينة فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا و يكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة) تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى بالإطار. فمثلا إذا أردنا اختيار عينة من عمال صناعة النسيج (كما ذكرنا سابقا) لتقدير متوسط أجر العامل فإنه يلزمنا وجود قائمة بأسماء العمال وأجر كل منهم في هذه الصناعة وهذا هو الإطار، ويجب أن يكون شاملا لكل مفردات المجتمع أي لكل عمال الصناعة وأن يكون حديثا حتى يشتمل على العمال الجدد المعينين حديثا وأن يحدد لنا بدقة كل المعلومات التي تلزمنا في الدراسة . ثم نبدأ في اختيار العينة من الإطار و يتم ذلك عن طريق إعطاء كل مفردة رقما مسلسلا ثم اختيار العينة بطريقة الاختيار العشوائي.

(ب) الاختيار العشوائي:

يتم الاختيار العشوائي بطريقة معينة تضمن فرصا متساو ية لاختيار المفردات في العينة . وليس معنى الاختيار العشوائي أن يكون اختيارا حسبما اتفق أو كما يقولون ضرب عشواء، فقد يظن البعض أن الاختيار العشوائي من قائمة مكتوب بها مجموعة من الأسماء أن نفتح صفحة من هذه القائمة ثم نمسك بالقلم ونغمض أعيننا ثم نضع القلم على الصفحة ثم نفتح أعيننا ونختار الإسم الذي وقع عليه القلم . في الواقع هذا النوع من الاختيار لا يخلو من التحيز حيث أن الإنسان المغمض العينين يحاول دائما أن يضع القلم في وسط الصفحة (خشية أن يخرج قلمه عن حدود الصفحة) وهذا الحذر يعطي للأسماء الموجودة في وسط الصفحة فرصة أكبر من الأسماء الموجودة على الأطراف وإنما الاختيار العشوائي يمكن أن يتم بطريقة مبسطة جدا وذلك بأن نكتب الأعداد (صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) على عشر بطاقات (أو عشرة كرات) متشابهة تماما في كل شيء من حيث اللون والحجم والوزن وكل الصفات. ونضع البطاقات العشر (أو الكرات العشر) في كيس أو وعاء مغلق يدور بالبطاقات (أو الكرات) فيخلطها في بعضها خلطا جيدا و بهذا لو سحبنا أي بطاقة (أو كرة) من الكيس لا نعرف بالضبط ما هي البطاقة التي سنحصل عليها وإنما تكون الفرصة واحدة لكل البطاقات في الظهور. فلو كان حجم العينة ٢٥٠ مفردة مثلا وعدد المفردات في الإطار خمسة آلاف مفردة ــ فلكي نختار العينة من الإطار نلاحظ أن ترتيب أي مفردة لابد أن

يتراوح بين ١ و٥٠٠٠ـــ أي أن أكبر رقم مسلسل في الإطار يتكون من ٤ خانات (آحاد ـــ عشرات ـــ مئات ـــ ألوف) لهذا يجب أن نختار لكل مفردة من مفردات العينة ٤ بطاقات كل بطاقة تعطي لنا رقما من الخانات الأربعة ـــ فمثلا نسحب بطاقة عشوائيا من البطاقات المحكمة الخلط في الكيس نفرض مثلا أننا وجدنا عليها العدد (٣) فيكون هو رقم الآلاف ـــ ثم نرجع البطاقة إلى الكيس ونحكم خلطها مع بقية البطاقات وذلك بدوران الكيس ثم نسحب بطاقة ثانية نفرض أننا وجدنا عليها العدد (صفر) فيكون هو رقم المئات ونكرر العملية مرتين لنحصل على رقمي العشرات والآحاد ونفرض أننا وجدناهما (٣) للعشرات و(٧) للآحاد فيكون الرقم المسلسل لهذه المفردة هو (٣٠٣٧) في الإطار. ونعتبر هذه هى المفردة الأولى في العينة ـــ أي أن أول مفردة في العينة هى المفردة التي تحمل الرقم (٣٠٣٧) في الإطار. ونكرر هذا العمل للحصول على المفردة الثانية والثالثة والرابعة إلى آخر مفردات العينة وذلك مع استبعاد الأرقام المكررة التي سبق اختيارها من الإطار وكذلك الأرقام التي تزيد عن ٥٠٠٠ أي عن حجم الإطار. و بهذه الطريقة يمكن القول أن العينة عشوائية وأنها ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا أو أنها صورة مصغرة للمجتمع و بالتالي يمكن تعميم أي نتائج نحصل عليها من العينة على كل مفردات المجتمع الأصلي وليست طريقة البطاقات (أو الكور) هى الطريقة الوحيدة للاختيار العشوائي وإنما هناك جداول للأعداد العشوائية مصممة لهذا الغرض ـــ وهى عبارة عن أعداد مختارة بالطريقة العشوائية (بالبطاقات أو الكور) ومرتبة في شكل أعمدة وصفوف لتوفير المجهود الذي يبذل في الاختيار العشوائي بواسطة البطاقات وتأخذ جداول الأعداد العشوائية الشكل التالي:

٨٤٢٥٧	٧٥٢٠٠	٧٦٥٣٤	٤٧٦٣٥
٦٣٥٨٦	٨٧٤٣١	٦٨١٢٣	٥٨٩٧١
٧٩٤٧١	١٢٣٤٥	٢٠٤٥٠	٥٣٢٠٢
٥٦٣٨٥	١٣٧٦٤	١٣٤٦١	٩٤٠٣٦
٠٠٧٦٥	٢٦٨٣٠	٦٠٨٧٢	٩٠٠٠١

٧٦٤٥٣	٠٩٨٧١	٠٠٧٨٢	٣٥٠٢١
٨٤٢٥٢	٦٠٥٣٠	١٨٦٤١	٧٦٨٢٤
٠١٦٣٥	٩٣٠٨٠	٤٥٧٨٩	١٥٨٧٦
٢٩٠٥٤	٨٤٣٢٣	٠٤١٢٣	٠٦٨٧١

١٠٢٣١ ٧٨٩٥٦ ٢٨٧٦٥ ٢٧٨٩١

. . . .

. . . .

و يشتمل جدول الأعداد العشوائية على صفحات عديدة من هذه الأ رقام العشوائية . و يوجد نموذج من هذا الجدول في نهاية هذا الباب .

فمثلا لاختيار العينة السابقة التي حجمها ٢٥٠ مفردة من مجتمع عدد مفرداته ٥٠٠٠ ــ نلاحظ أن أكبر رقم مسلسل في المجتمع وهو ٥٠٠٠ مكون من ٤ خانات لهذا نختار أربع أعمدة (أو أربعة صفوف) من الجدول عشوائيا لنفرض أنها الأعمدة (الثالث والرابع والخامس والسادس) فنحصل على الأرقام التالية :

٠٨٤٢

١٦٣٥

٥٧٩٤

٤٥٦٣

٠٠٠٧

١٧٦٤

٠٨٤٢

٠٠١٦

٣٢٩٠

٦١٠٢

.

.

.

.

.

.

نستبعد من الأ رقام السابقة كل الأ رقام التي تزيد عن خمسة آلاف وهو أكبر رقم في الإطار لهذا نستبعد الرقم الثالث (٥٧٩٤) والرقم العاشر (٦١٠٢) كذلك نستبعد أي رقم مكرر لهذا نستبعد الرقم السابع لأنه مكرر في الأ ول ثم نرتب بقية الأ رقام ترتيبا تصاعديا فنحصل على أرقام المفردات التي يجب أن نسحبها من الإطار وهم العمال ذوي الأ رقام المسلسلة التالية :

٧ــ ١٦ــ ٨٤٢ــ ١٦٣٥ــ ١٦٧٤ــ ٣٢٩٠ــ ٤٥٦٣ــ ٠٠٠٠ وهكذا حتى نحصل على ٢٥٠ مفردة وهى كل مفردات العينة .

وعند استخدام جدول الأعداد العشوائية يجب عند البداية فتح الجدول عشوائيا على أي صفحة دون اختيار صفحة معينة ثم نختار العمود الأ ول (أو الصف الأ ول) عشوائيا و بعد ذلك يمكن أخذ الأ رقام من الجدول حسب ترتيبها داخل الجدول حيث أنها مرتبة داخل الجدول عشوائيا .

(٢) العينة العشوائية المنتظمة :

إن اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع رقمـــا ملسلسلا داخل الإطار. ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المسلسل لكل مفردة يبعد بعدا ثابتا منتظما عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك عن رقم المفردة اللاحقة لهاــ و يتم ذلك على النحو الآتي :

(أ) نقسم الإطار إلى فترات منتظمة وليكن طول كل منها ف و يتوقف على حجم العينة .
(ب) نختار عشوائيا مفردة واحدة من مفردات الفترة الأ ولى ولتكن المفردة رقم ل .
(جـ) بذلك تتحدد تماما مفردات العينة وهي المفردات التي أرقامها المسلسلة هي : ل ،ل+ ف ،ل+ ٢ ف ، ل + ٣ ف ،. . .

مثال :

(أ)

نفرض أن حجم العينة المطلوبة هو ٥٪ من حجم المجتمع أى أن من بين كل ١٠٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى ٥ مفردات في العينة أو من بين كل ٢٠ مفردة في المجتمع نحتاج إلى مفردة واحدة في العينة .

(ب)

نقسم الإطار إلى فترات طول كل منها ٢٠ مفردة فتكون أرقام الفترة الأ ولى في الإطار هى
١ــ ٢ــ ٣٠٠٠ ــ ٢٠
وأرقام الفترة الثانية في الإطار هى ٢١ــ ٢٢ــ ٠٠٠ ــ ٤٠

وهكذا حتى نهاية المفردات في المجتمع .

(جـ)

تستخدم الطريقة العشوائية البسيطة السابقة لاختيار مفردة واحدة من مفردات الفترة الأولى لتكون هى أول مفردة في العينة لنفرض أننا حصلنا على الرقم ١٧ مثلا .

(د)

بعد تحديد المفردة الأولى في العينة يتحدد تماما باقي مفردات العينة كل ما هو مطلوب أن نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الأولى لنحصل على رقم المفردة الثانية ثم نضيف طول الفترة إلى رقم المفردة الثانية لنحصل على رقم المفردة الثالثة وهكذا حتى نحصل على كل مفردات العينة . و بهذا تتكون العينة من المفردات التي أرقامها المسلسلة في الإطار هى :

١٧ ــ ٣٧ ــ ٥٧ ــ ٧٧ ــ ٩٧-١١٧-٠٠٠٠٠

نلاحظ أن طريقة الاختيار في هذه العينة أسهل من العينة العشوائية البسيطة وذلك لأن الاختيار العشوائي يتم بالنسبة لأول مفردة فقط أما باقي المفردات فتتحدد تلقائيا حسب رقم أول مفردة وحجم العينة ــ كما أن العينة تكون منتشرة على كل أجزاء المجتمع و بالتالي تكون أكثر تمثيلا وخاصة إذا كان المجتمع غير متماثل ــ ولكن هذه الميزات يقابلها صعوبة في تحليل نتائج هذا النوع من العينات ولا يتسع المجال هنا للتعرض لمثل هذه الصعوبات التي تحتاج إلى قدر أكبر من الدراسة في نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ونظرية التقدير لهذا فقد اكتفينا بتعريفها وتوضيح طريقة اختيارها فقط .

(٣) العينة الطبقية :

نلجأ إلى هذا النوع من العينات في الحالة التي يكون فيها المجتمع مكونا من طبقات غير متجانسة و يتحتم علينا تمثيل كل هذه الطبقات داخل العينة بحيث يتم تمثيل كل طبقة بعدد من المفردات يتناسب حجمه مع أهمية هذه الطبقة في المجتمع و بالتالي لابد أن نختار مفردات العينة من جميع الطبقات بعد تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة ثم نختار هذه المفردات من داخل الطبقة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة وذلك حسب ما يراه الباحث .

ومما هو جدير بالذكر أنه يوجد عدة أنواع أخرى من العينات منها العينات المتعددة المراحل والعينات العنقودية وغيرها مما لا يتسع المجال للتعرض لها بالتفصيل . لهذا نكتفي فقط بذكر الأنواع الثلاثة السابقة حيث أن هذا القدر من الدراسة يسمح لنا بتفهم تحليل نتائج العينات وهو موضوع الدراسة في الباب التالي .

نموذج من جدول الأعداد العشوائية

٣٢	٥٠	٥٣	١٦	٩٥	٧٧	٠٢	٤٨	٤٩	١٥
٩٢	٥٣	٤٠	٥١	٨٢	٦٤	٦٧	٣٦	١٢	٢٨
٢٧	٧٠	٢١	٣٤	٥٩	١٢	٥٥	٤٣	٢٥	٣٤
٢٥	١٠	١٦	٧٠	٩١	١٦	٣٧	٧١	٨٢	٢٣
٣١	١١	٣٣	٤٩	٨٣	٣٧	٤٢	٤٣	٨٣	٦٧

٤٠	٥٤	٧٧	٧٨	١٤	٤٤	١٧	٨٤	٤١	٧٦
٣٤	١١	٦٤	٤٧	١٧	٦٤	٧٦	٨٨	٥٩	٨٥
١٨	٨٧	٣٧	٦١	٣٢	٢٨	٤٧	٨٠	٠٢	٩٢
٩٤	٦٧	١٢	٤٤	٧٩	٥٣	٢١	٦٥	٦٨	٥٨
٤٠	٧٣	٤٤	٢١	١٤	٥١	٩٦	٩٨	٤٢	٢٧

٦٣	١٧	١٤	٥٨	٩١	٣١	٣٠	٧٩	٧٠	٣١
٣٩	٧٠	١٥	١٨	٩٦	٩٥	١٥	٨٤	٨٢	٤٠
٥٩	٩١	٢٥	١٠	٥٤	٤٦	٠٦	٢٣	٩٥	٥٩
٠٥	٢٨	٥٣	٦٨	٥٢	٨٤	٦٤	٣٠	٦١	٦٤
٦٣	١٢	٨٢	٧٠	٣٥	٢١	٥٥	٤٢	٥٦	٤٣

٣٣ ٤٦ ٨٢ ١٣ ٠٥ ٠٨ ٤٠ ٢٦ ٨٢ ٠٩
٨٥ ٦٠ ٦٧ ٥٥ ٢٤ ٧٣ ٠٠ ٤٠ ٧٩ ٦٨
٢٠ ٥٥ ٩٨ ٧٦ ٩٨ ٧٩ ١٩ ٩٢ ٨٠ ٣٦
٦١ ٣٢ ٥١ ٦٦ ٩٠ ٠٣ ٤٣ ٢٤ ٣٦ ٠٧
٦٨ ٧٧ ٥٤ ٥٣ ٩٠ ٢٣ ٩٥ ١٣ ٣٧ ٨٢

٨٠ ١١ ٦٣ ٤٤ ٠٠ ٢٠ ٥٤ ٠٦ ٣٥ ٨١
٢٢ ٦١ ٥٥ ٦٤ ٠٤ ٠٨ ٨٣ ٣٥ ٦٦ ٧٣
٨٥ ٣٩ ٣٧ ٩٠ ٥٤ ٣٨ ٩٥ ٤٥ ٤٤ ٧٣
٢١ ٤٣ ١٨ ٠٥ ٦٩ ٩٨ ٥٤ ٨٢ ٧٨ ٤٢
١١ ٧٥ ٧٥ ٢٩ ٩٢ ٦٤ ٨٣ ٩٥ ٧٢ ٦٨

٢٨ ٩٣ ٥٤ ٢٤ ٥٥ ٧٣ ٦٢ ٩٢ ١٩ ٩٣
٧٣ ٥٧ ٥٧ ٢٢ ٣٢ ٢٢ ٧٧ ٧٠ ٥٤ ٠٢
٣٠ ١٤ ١٧ ٢٥ ٤٨ ٦٤ ٦٠ ٧٣ ٥١ ٦٢
٤٨ ٢٦ ٧٦ ٥٩ ٥٢ ٥٧ ٤٢ ١٨ ٠٦ ٣٨
٢٢ ٣٨ ٩٥ ٣٠ ٧٢ ٤٤ ٧٧ ١٤ ٤٩ ٦١

١٩ ٠٧ ٢٠ ١٦ ٤٥ ٦٣ ٧٩ ٦٤ ١٩ ٩٠
٤١ ٠٧ ٢٣ ٦٦ ٨١ ٩٤ ٤٥ ٣٠ ٩٦ ٤٦
١١ ٦٧ ٨٩ ٧٦ ٦٥ ١٩ ٣١ ٢٧ ٧٧ ٤١

٥٢ ٥٨ ٦٠ ٤٤ ٣١   ٥٢ ٩٦ ٩٨ ٨٦ ٩٩
٤٨ ٩١ ٤٣ ٢١ ٧٩   ١٩ ٤٣ ٦٤ ٦٧ ٩١

١٢ ٩٥ ٤٨ ٢٢ ٧٠   ٦٨ ٥٤ ٧٨ ٩٤ ٦٦
٦٩ ٩٤ ٨٨ ٨٨ ٥٧   ١١ ٦٥ ٨٣ ٩٨ ١٦
٤٥ ٢٢ ٧٥ ٠١ ٣١   ٤٠ ٢٨ ٦١ ٨٤ ٤٨
٤٧ ٦٥ ٠٦ ١٧ ٢٠   ١٣ ٨٤ ٥٣ ٢٤ ٩٦
٤٢ ٩٠ ٥٧ ٥٩ ١٨   ٩٤ ٤٧ ٨٤ ١٥ ٥٦

٠٧ ٤١ ٤١ ١٥ ٠٢   ٠١ ١٦ ٥٣ ٠٢ ٦٦
٣٩ ٢٣ ٥٨ ٥٠ ١٦   ٢٨ ٧١ ٦٦ ٨٥ ١٨
٦٩ ٤٧ ٩٩ ٦٢ ٧٤   ٠٢ ٨٤ ٨٨ ٨٠ ٩٣
٥٨ ٤٢ ٠٥ ٩٩ ٤٥   ٢٢ ١٤ ٢٣ ٧٣ ٩٥
٩١ ٦٨ ٦٢ ٤٥ ٥٠   ٢٤ ٣٥ ٣٩ ٤١ ٤٠

٣٦ ٦٤ ٩٧ ٤٤ ١٢   ٠٦ ٧٠ ٨٨ ٦٦ ٢٨
١٤ ٩٦ ٣٥ ١٧ ٧٦   ٩٢ ٦٠ ٤٨ ١٩ ٠٩
٤٨ ١٩ ٠٩ ٣٣ ٧٣   ٠١ ١٣ ٧٣ ٩٦ ٩٧
٤٩ ١٢ ٢٥ ٨٢ ٨٣   ٤١ ٥٩ ٠٢ ٦٨ ٤٢
٨٠ ٨٢ ٩٥ ٦١ ٥٦   ٨٢ ٧٩ ٨٠ ٣٦ ٣٧

٩٥	١	٤٣	٣٩	٦٨	٢٧	٧٦	٥٢	٤٨	٩٨
٦٠	٦٢	٣٦	٧٤	٤٢	٣٧	٨٥	٤٠	٩٣	١٧
٣٥	٣٩	٤٨	٥٨	٥٥	١٨	٤٢	٤٩	٥٩	٥٤
٧٠	٧٨	٠٥	٤٩	٩٦	٠٦	٢٣	٨٨	٠٦	٢٦
٩٦	٥١	٥٠	٢٤	٠٠	١٧	١٠	٠٧	٥٧	٨٢

٦٤	٦٣	٥٨	٩٦	٤٨	٦٦	٣٦	٢٩	٩٤	٧٢
٣٠	٤٥	٢٧	٤٢	٧٢	٦٧	٧٣	٦٠	٩٣	١٨
٩١	٦٠	٧٦	٨١	٠٢	٢١	٣١	١٩	٤٥	٦٤
٩٥	٨٠	٦٦	١٦	٩٤	٢٠	٠١	٧٥	٩٤	١٢
١٧	٢٣	٤٩	٩٣	٩٨	٦٨	٠٥	٦٢	١٦	٠١

٦١	٧٣	٣٤	٥٦	٦٤	٢٩	٠٦	١٥	٣٧	٣١
٨٥	٢٠	٢٧	١٠	١٠	٦٤	٨١	٠٠	٦١	٤١
١٢	٤٩	٥٤	٧٨	٧٤	٥٨	١٨	٩٩	٠٤	٠٧
٣٤	٠٢	٦٧	٤٠	٩٠	٨٥	٤٨	٥٤	٦٤	٤٩
٨٣	٤٠	١٦	٥٤	٦١	٩٤	١٧	٦٩	٥٨	٦٢

٦٣	٩١	٥٠	٨٠	٠٤	٦٤	٦٥	٠٤	٠٦	٤٩
٠٨	٥٨	٥٣	٣٨	٥٠	٥٩	٤٣	٧١	٧٩	٣٩
٣٣	٥٠	١٨	٥٠	٧٤	٠٣	١٧	٣٦	٣٨	١٠

٥٢ ٨٦ ٧٣ ٣٢ ٤٣ ٤٤ ٣٧ ٢٩ ٣٩ ٨٣
٤٧ ٧١ ٨١ ٨٩ ٦٤ ٣٢ ٠٧ ١٩ ٢٥ ٩٨

٧٢ ٩٥ ٦٩ ٨٤ ٥٩ ٦٦ ٢٥ ٢٥ ٥٥ ٦١
١٩ ٩٤ ٢٩ ٦١ ٢٤ ١٦ ٧٢ ١١ ٢٨ ٧٢
٢٦ ٢٢ ٣٦ ٤٠ ٠٣ ١٢ ٥٣ ٠٣ ٧٦ ٤٥
٣٧ ٦٥ ١٥ ٦٦ ١٩ ٧٥ ١١ ٧٦ ٥٧ ٥٨
٥٤ ٩٠ ٨٣ ٥٠ ٤٨ ٣٦ ١٢ ٩٩ ١٢ ٢٢

٨٠ ٥٨ ٧٢ ٩٩ ٣٩ ٩٦ ٩٤ ٨٠ ١٥ ٨٨
٣٠ ٠٦ ٥٤ ٩١ ٧٤ ٢٥ ٥٨ ٣٧ ٠٨ ١٣
١٦ ٥٢ ٢٤ ٢٤ ٦٠ ٣٢ ٥٣ ٦٢ ٠٤ ٧٥
٠٣ ٣٥ ٣٥ ٢٢ ٨٩ ٧١ ٤٩ ٤٥ ٦٤ ٧٥
٣٤ ٠٧ ٠٦ ٧٣ ٨٦ ٣٨ ٢٦ ٩١ ٨٤ ٥٧

٨٠ ١٨ ٤٥ ٧٣ ٢٥ ٨٨ ٣٠ ٤٢ ٠١ ٣٤
١٨ ٤٨ ٩٣ ٩٦ ٣٦ ٧٥ ١٢ ٦٩ ٣٨ ٧٥
٣٥ ٩١ ٣٠ ٦٠ ٤٠ ٦٩ ٧٥ ٦٣ ٦٣ ٢١
٥٦ ٩٦ ٣١ ٣١ ٧٣ ١١ ٧٨ ٧٣ ٥٦ ٣٧
٧٨ ٣٢ ٦٦ ٧٨ ٣٨ ٦٧ ٨٢ ٦٤ ٩٨ ١٩

٤٤	٧٥	٦٤	٧١	٣٠	٦٤	١٩	٣٦	٤١	٤٤
١٠	٦١	٤٢	٢٨	٥٧	٦٠	٢٤	٧٢	٢٣	٧٨
٦٠	٢٧	٠٨	١٧	٩٦	٣٦	٢٢	٢٢	٤٧	١٨
٤٥	٩٧	٠١	٨٨	١٧	٦٨	٤٤	٢٦	٤٢	٥٢
٥١	٣٠	٧٣	٦٧	٧٦	٦٩	٥١	٩٤	٦٨	٨٦

الباب الخامس

توزيعات المعاينة (العينات الكبيرة)

توزيعات المعاينة

(العينات الكبيرة)

(٥ـ١) ـ مقدمة :

في هذا الباب نقدم بعض الطرق الإحصائية التي تمكننا من استخدام العينات العشوائية في التعرف على خواص المجتمعات التي سحبت منها هذه العينات . فإذا كنا نهتم بمعرفة متوسط أجر العامل في صناعة معينة مثل صناعة المنسوجات فيمكن سحب عينة عشوائية من العمال في هذه الصناعة ونحسب متوسطها ـ نفرض أننا وجدنا متوسط أجر العامل في العينة هو ٣ آلاف ريال في الشهر فليس معنى ذلك أن يكون متوسط أجر العامل في الصناعة كلها ٣ آلاف ريال . وذلك لأن هذه العينة العشوائية قد يظهر فيها بالصدفة البحتة عدد كبير من العمال ذوي الأجور المرتفعة و بالتالي يكون متوسط أجر العامل في العينة أعلى من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع وقد يحدث العكس بأن تشتمل العينة على عدد كبير من العمال ذوي الأجور المنخفضة مما يجعل متوسط أجر العامل في العينة أقل من متوسط الأجر الحقيقي في المجتمع . وكما ترى تكون الصدفة وحدها هي التي قد تسبب هذه الاختلافات بالزيادة أو بالنقص بين متوسط الأجر في العينة ومتوسط الأجر في المجتمع . وهذا هو خطأ الصدفة الذي سبق أن تكلمنا عنه في الباب السابق و يهمنا الآن أن ندرس تأثير هذا الخطأ على أي مقياس إحصائي نحسبه من العينة سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو غيره من المقاييس . ولنبدأ الآن بدراسة أثر خطأ الصدفة على الوسط الحسابي للعينة وإلى أي حد يمكن أن يختلف عن الوسط الحسابي للمجتمع بفعل تأثير هذا الخطأ .

(٥ـ٢) ـ توزيعات المعاينة :

نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معينا (سواء كان هذا المجتمع كبيرا أو محدودا) وأننا بصدد سحب عينة حجمها ن من هذا المجتمع . بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو ن من المفردات .

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها ن من هذا المجتمع وحسبنا من هذه العينة مقياسا معينا (وليكن الوسط الحسابي) ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم ن وحسبنا منها نفس المقياس ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع . سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساو ية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتكون مجتمعا آخر .

عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي . وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (هى التي حصلنا عليها من هذه العينات) و يتبع توزيعا معينا ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي يسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو نسبة المفردات التي لها صفة معينة أو الانحراف المعياري أو غيره من المقاييس الإحصائية .

مثال (١) : مجتمع مكون من ١٠ مفردات سحبت عينات حجمها ٣ من هذا المجتمع وحسبت من كل عينة مقياس احصائي معين (وليكن الوسط الحسابي) فكم قراءة يتكون منها مجتمع هذا المقياس ؟

الحل

عدد مفردات المجتمع الأصلي = ١٠ مفردات

حجم العينة = ٣ مفردات

إذن عدد العينات التي يمكن سحبها = ^{١٠}ق$_{٣}$ = ١٢٠

وحيث أننا نحسب المقياس لكل عينة

إذن مجتمع هذا المقياس يتكون من ١٢٠ قراءة.

و بالمقارنة نجد أن عدد مفردات مجتمع المقياس أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي .

(٥ـ٣) ـ المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة:

في دراستنا لتوزيعات المعاينة لابد أن نفرق بين العينات المسحوبة من مجتمعات كبيرة أو لا نهائية و بين العينات المسحوبة من مجتمعات محدودة . فعند سحب عينة من المصابيح من إنتاج مصنع معين فإننا بلا شك نسحب من مجتمع كبير هو إنتاج المصنع . ولكن عند سحب عينة من طلبة قسم المحاسبة في كلية الاقتصاد والادارة في العام الحالي فإننا بلا شك نسحب من مجتمع محدود هو طلبة قسم المحاسبة لهذا العام . وكذلك عند سحب عينة مكونة من عشرة مفردات من بين مجتمع مكون من مائة مفردة . في هذه الحالة إذا كان في الإمكان سحب المفردة أكثر من مرة يمكن اعتبار المجتمع لا نهائي أو كبير ولكن إذا لم يكن مسموحا بسحب المفردة أكثر من مرة يكون المجتمع محدودا . وأيضا عند سحب كرات من كيس به عدد من الكرات فإذا كان السحب مع الإعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه كأنه مجتمعا لا نهائيا ونعامله على أنه مجتمع غير محدود وإذا كان السحب بدون إعادة فإننا نعتبر المجتمع الذي نسحب منه مجتمعا محدودا . ومما هو جدير بالذكر أننا نهتم بالتفرقة بين المجتمع الكبير والمجتمع المحدود بسبب اختلاف خصائص توزيعات المعاينة للعينات المسحوبة من المجتمعات الكبيرة عن تلك المسحوبة من المجتمعات المحدودة كما سيتضح من دراستنا التالية .

(٥ـ٤) ـ مجتمع المتوسطات الحسابية وبعض خصائصه:

نفرض أن لدينا مجتمعا ولتكن مفرداته هى:

$$س_١ \quad ، \quad س_٢ \quad ، \quad س_٣ \quad ، \quad ....$$

ونفرض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها ن وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه $\bar{س}_١$ ثم سحبنا عينة أخرى لها نفس الحجم وحسبنا وسطها الحسابي فوجدناه $\bar{س}_٢$، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم ووجدنا أن وسطها الحسابي $\bar{س}_٣$ وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها ن والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هى المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهى تكون مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها ن والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي:

$$\bar{س}_١ \quad ، \quad \bar{س}_٢ \quad ، \quad \bar{س}_٣ \quad ، \quad \bar{س}_٤ \quad ، \quad ....$$

وهذه المتوسطات تختلف عن بعضها تبعا لتأثير خطأ الصدفة على كل عينة كما أنها تكون مجتمعا جديدا له توزيع احتمالي يهمنا معرفته ودراسته. ومجتمع المتوسطات الحسابية $\bar{س}$ كأي مجتمع آخر له توزيع احتمالي يتمتع بجميع صفات وخواص التوزيعات الاحتمالية وبالطبع له متوسط وانحراف معياري فلو كان:

متوسط المجتمع الأصلى $= \mu$

والانحراف المعياري للمجتمع الأصلي $= \sigma$

فيمكن باستخدام النظريات الإحصائية والرياضية إثبات أن:

متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجم كل منها ن هو μ

والانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{ن}} & \text{إذا كان المجتمع كبيرا.} \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\sqrt{ن}} \sqrt{\dfrac{ن - ن}{ن - ١}} & \text{إذا كان المجتمع محدودا وحجمه ن.} \end{cases}$$

وهذا يعني أن متوسط مجتمع المتوسطات هونفسه متوسط المجتمع الأصلي. والانحراف المعياري هو الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي مضروبا في عامل معين. وهذه المعلومات صحيحة مهما اختلف التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات عن التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي.

وإذا نظرنا إلى الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات نلاحظ أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانسا من المجتمع الأصلي أى أن مفرداته متجانسة وغير متشتتة إذا قورنت بمفردات المجتمع الأصلي وهذا من أهم الأسباب التي تجعلنا نعتمد على مجتمع المتوسطات في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي.

فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي = ١٥

وحجم العينة = ١٠٠ مفردة

فإن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات $= \frac{١٥}{\sqrt{١٠٠}} = ١٫٥$

وهذا يوضح أن مجتمع المتوسطات أكثر تجانسا بقدر واضح من المجتمع الأصلي.

مثال (٢) : نفرض أن لدينا مجتمعا مكونا من المفردات التالية:

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨

والمطلوب :

(أ) حساب متوسط المجتمع الأصلي.

(ب) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي.

(جـ) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها مع الإرجاع.

(د) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة.

(هـ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية $\mu(\bar{س})$.

(و) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية $\sigma(\bar{س})$.

(ز) قارن بين μ و $\mu(\bar{س})$ وكذلك بين σ و $\sigma(\bar{س})$.

الحل

(أ) متوسط المجتمع الأصلي $\mu = \frac{٢ + ٤ + ٥ + ٦ + ٨}{٥} = ٥$

(ب) الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي

$$= \sqrt{\frac{(٢ - ٥)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (٦ - ٥)^٢ + (٨ - ٥)^٢}{٥}} = ٢$$

(جـ) بما أن حجم العينة ن = ٢

إذن كل العينات الممكن سحبها مع الإرجاع من هذا المجتمع هى:

(٢ ، ٢) (٢ ، ٤) (٢ ، ٥) (٢ ، ٦) (٢ ، ٨)

(٤ ، ٢) (٤ ، ٤) (٤ ، ٥) (٤ ، ٦) (٤ ، ٨)

(٥ ، ٢) (٥ ، ٤) (٥ ، ٥) (٥ ، ٦) (٥ ، ٨)

(٦ ، ٢) (٦ ، ٤) (٦ ، ٥) (٦ ، ٦) (٦ ، ٨)

(٨ ، ٢) (٨ ، ٤) (٨ ، ٥) (٨ ، ٦) (٨ ، ٨)

وعدد العينات هنا ٢٥ وهو يساوي تماما عدد طرق سحب مفردتين من بين ٥ مفردات عندما يكون السحب مع الإعادة وهو ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

(د) والمتوسطات الحسابية لهذه العينات هى:

٥	٤	٣ر٥	٣	٢
٦	٥	٤ر٥	٤	٣
٦ر٥	٥ر٥	٥	٤ر٥	٣ر٥
٧	٦	٥ر٥	٥	٤
٨	٧	٦ر٥	٦	٥

والقيم السابقة تمثل مجتمع المتوسطات الحسابية حيث أن أول مفردة هى الوسط الحسابي للعينة الأولى ($\frac{٢ + ٢}{٢} = ٢$) وثاني مفردة هى الوسط الحسابي للعينة الثانية ($\frac{٢ + ٤}{٢} = ٣$) وهكذا.

(هـ) و يكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\mu(\bar{س}) = \frac{٢ + ٣ + ٣ر٥ + \cdots + ٧ + ٨}{٢٥} = \frac{١٢٥}{٢٥} = ٥$$

وهى نفس قيمة μ.

(و) وكذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو:

$$\sigma(\bar{س}) = \sqrt{\frac{(٢ - ٥)^٢ + (٣ - ٥)^٢ + (٣ر٥ - ٥)^٢ + \cdots + (٧-٥)^٢ + (٨-٥)^٢}{٢٥}}$$

$$= \sqrt{٢}$$

(ز) وللمقارنة بين كل من μ ، $\mu(\bar{س})$ وكذلك بين σ و $\sigma(\bar{س})$

نجد أن:

$\mu = \mu(\bar{س})$ حيث أن كل منهما = ٥

$\sigma = ٢$ ، $\sigma(\bar{س}) = \sqrt{٢}$

$$\therefore \sigma(\bar{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

المثال السابق يعتبر مثالا عن حالة سحب عينة من مجتمع محدود ولكن السحب مع الإعادة أي أن كل مفردة يمكن تكرار تمثيلها في العينة مثل العينات:

(٢، ٢) ــ (٤، ٤) ــ (٥ ــ ٥) ــ (٦ ــ ٦) ــ (٨، ٨)

كما أن المفردتين (٢ ، ٤) يعتبران عينة والمفردتين (٤ ــ ٢) يعتبران عينة أخرى وهذه الحالة نعاملها معاملة المجتمعات غير المحدودة كما ذكرنا سابقا عند الكلام عن المجتمعات الكبيرة والمجتمعات المحدودة أما حالة السحب بدون إعادة فتعتبر كحالة السحب من مجتمع محدود لذلك لابد لنا من مناقشة حالة السحب بدون إعادة من مجتمعات محدودة لمعرفة الفرق بين الحالتين.

فيما سبق ذكرنا في حالة السحب من مجتمع غير محدود أن متوسط مجتمع المتوسطات $\mu(\bar{س})$ هو نفسه متوسط المجتمع الأصلي μ ـ أي أن $\mu(\bar{س}) = \mu$

كذلك وجدنا أن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات $\sigma(\bar{س})$ يساوي الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي σ مقسوما على $\sqrt{n}$ أي أن $\sigma(\bar{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ولكن الحال يختلف عند السحب بدون إعادة من مجتمع محدود له حجم معين وليكن ن. سنجد أن الوسط الحسابي لمجتمع المتوسطات يساوي الوسط الحسابي للمجتمع الأصلي مثل الحالة السابقة تماما ــ ولكن الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات في هذه الحالة يساوي الانحراف المعياري مقسوما على $\sqrt{n}$ ومضروبا في عامل معين هو $\sqrt{\frac{ن - n}{ن - ١}}$

حيث ن هى حجم المجتمع ، n هى حجم العينة أي أن

$$\sigma(س) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{ن - n}{ن - ١}}$$

ولتوضيح الفرق بين الحالتين سنقدم المثال التالي:

مثال (٣): نفرض أن لدينا نفس المجتمع الموجود في المثال السابق والذي مفرداته: ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨.

والمطلوب:

(أ) حساب متوسط المجتمع الأصلي μ.

(ب) حساب الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي σ.

(جـ) حصر جميع العينات التي حجم كل منها مفردتين ويمكن سحبها بدون إرجاع .

(د) حساب المتوسط الحسابي لكل عينة .

(هـ) حساب متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية μ $(\bar{س})$.

(و) حساب الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية σ $(\bar{س})$.

(ز) قارن بين μ و μ $(\bar{س})$ وكذلك بين σ و σ $(\bar{س})$.

الحل

(أ) μ = ٥ كما في المثال السابق

(ب) $\sigma = \sqrt{٢}$ كما في المثال السابق

(جـ) العينات التي حجم كل منها ن = ٢ والتي يمكن سحبها بدون إعادة هى :

(٢ ، ٤) (٢ ، ٥) (٢ ، ٦) (٢ ، ٨)

(٤ ، ٥) (٤ ، ٦) (٤ ، ٨)

(٥ ، ٦) (٥ ، ٨)

(٦ ، ٨)

ويجب ملاحظة أنه عند سحب العينة نقوم أولا بسحب مفردة ثم نحتفظ بها ونسحب مفردة أخرى غيرها فلا يمكن أن يكون لدينا مثلا عينة (٢ ، ٢) أو(٤ ، ٤) كما أن العينة(٤،٢) هى نفس العينة (٤ ، ٢) أي لا نعتبرهما عينتين مختلفتين كما في المثال السابق .

(د) و بحساب المتوسط الحسابي لكل عينة نحصل على مجتمع المتوسطات في الصورة التالية :

٣ ٣٫٥ ٤ ٥

٤٫٥ ٥ ٦

٥٫٥ ٦٫٥

٧

(هـ) و يكون متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\mu(\bar{س}) = \frac{٣ + ٣٫٥ + ٤ + \cdots + ٦٫٥ + ٧}{١٠} = ٥$$

وهونفس متوسط المجتمع الأصلي .

(و) و يكون كذلك الانحراف المعياري لمجتمع المتوسطات الحسابية هو

$$\sigma(\bar{س}) = \sqrt{\frac{(٣-٥)^{٢} + (٣٫٥-٥)^{٢} + \cdots + (٧-٥)^{٢}}{١٠}}$$

$$= \sqrt{١٫٥}$$

(ز) وللمقارنة بين μ ، $\mu(\bar{س})$ وكذلك بين σ ، $\sigma(\bar{س})$

نجد أن: $\mu = \mu(\bar{س}) = ٥$

كما أن:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{ه}} \sqrt{\frac{ن-ه}{ن-١}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \sqrt{\frac{٥-٢}{٥-١}} = \sqrt{١٫٥} = \sigma(\bar{س})$$

$$\therefore \quad \sigma(\bar{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{ه}} \sqrt{\frac{ن-ه}{ن-١}}$$

(٥ـ٥) ـ التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية:

حتى الآن لم نتعرض لتوزيع مجتمع المتوسطات الحسابية ـ كل ما تعرضنا له هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ولكن شكل ونوع التوزيع الاحتمالي نفسه يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات. وفيما يلي بعض النظريات الإحصائية التي تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية نذكرها بدون إثبات وذلك لأننا سوف نستخدمها كثيرا في الاستدلال حول معالم المجتمع الأصلي:

نظرية (١): إذا كان لدينا مجتمع نرمز لمفرداته بالرمز س يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ وسحبنا منه عينات حجم كل منها ه فان الوسط الحسابي $\bar{س}$ للعينات يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه $\mu(\bar{س}) = \mu$

وانحرافه المعياري:

$$\sigma(\bar{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{ه}} & \text{إذا كان المجتمع كبيرا} \\[2ex] \dfrac{\sigma}{\sqrt{ه}} \sqrt{\dfrac{ن-ه}{ن-١}} & \text{إذا كان المجتمع الأصلي محدودا وحجمه ن} \end{cases}$$

مثال (٤): إذا كان أطوال طلاب الجامعات يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري

٨ سم ــ سحبت منه عينة مكونة من ٦٤ طالبا فما احتمال أن يكون متوسط أطوالهم أكبر من ١٧٢ سم ؟

الحل

$$\mu = \text{١٧٠ سم}$$

$$\sigma = \text{٨ سم}$$

$$\mu(\bar{\text{س}}) = \mu = \text{١٧٠ سم}$$

وحيث أن المجتمع كبير فإن

$$\sigma(\bar{\text{س}}) = \frac{\text{٨}}{\sqrt{\text{٦٤}}} = \text{١ سم}$$

وحيث أن المجتمع الأصلي س يتبع توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ٨ سم فإن مجتمع المتوسطات س يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه ١٧٠ سم وانحرافه المعياري ١ سم .

والمطلوب حساب $\text{ح}(\bar{\text{س}} \geq \text{١٧٢})$.

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$\text{ص} = \frac{\bar{\text{س}} - \text{١٧٠}}{\text{١}}$$

$$\text{عندما } \bar{\text{س}} = \text{١٧٢}$$

$$\text{فان ص} = \frac{\text{١٧٢} - \text{١٧٠}}{\text{١}} = \text{٢}$$

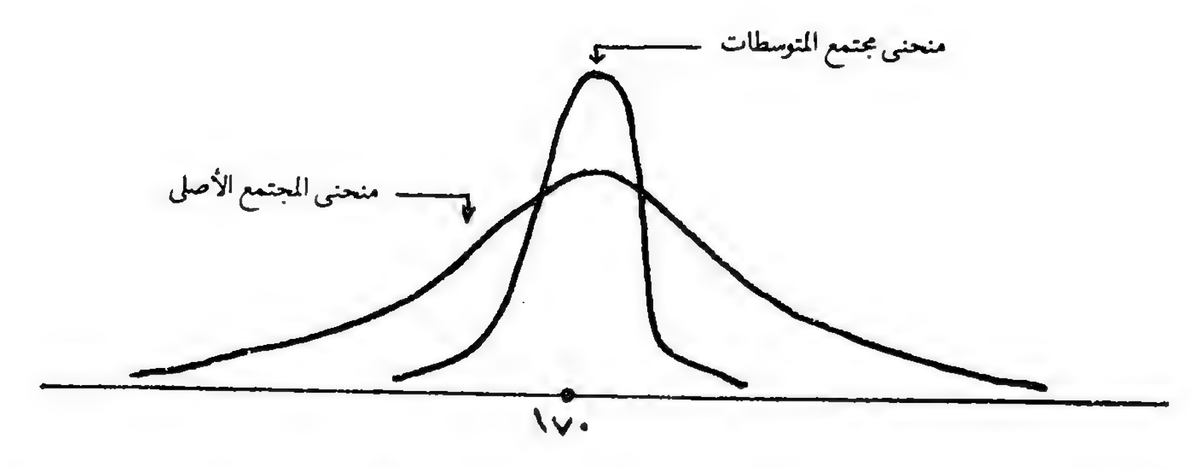
$$\text{إذن ح}(\bar{\text{س}} \geq \text{١٧٢}) = \text{ح}(\text{ص} \geq \text{٢})$$

$$= \text{٠ر٥} - \text{ح}(\text{٠} \leq \text{ص} \leq \text{٢}) .$$

$$= \text{٠ر٥} - \text{٠ر٤٧٧٢}$$

$$= \text{٠ر٠٢٢٨}$$

ملحوظة (١) : بمقارنة الانحرافين المعياريين لكل من المجتمع الأصلي ومجتمع المتوسطات يبرز مدى تجانس مجتمع المتوسطات عن المجتمع الأصلي ويمكن إيضاح ذلك برسم توزيع المجتمع الأصلي وتوزيع مجتمع المتوسطات في المثال السابق على رسم واحد كما يلي :



نظرية (٢) : إذا كان لدينا مجتمع س يتبع توزيعا احتماليا وسطه μ وانحرافه المعياري σ سحبنا منه عينات حجمها n وكانت n كبيرة فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ يتبع توزيعا طبيعيا وسطه $\mu(\bar{س}) = \mu$ وانحرافه المعياري:

$$\sigma(\bar{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ إذا كان المجتمع كبيرا

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{ن - n}{ن - 1}}$$ إذا كان المجتمع محدودا وحجمه ن

تسمى هذه النظرية بنظرية النزعة المركزية وهى توضح أن توزيع المتوسطات الحسابية يتبع توزيعا طبيعيا بصرف النظر عن نوع التوزيع الاحتمالي للمجتمع الأصلي. كل ما نحتاج إليه أن يكون حجم العينة كبيرا وأن يكون المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع محدودا.

ملحوظة (٢) : تعتبر العينة كبيرة إذا زاد حجمها عن ٣٠ مفردة كما أن المجتمع المحدود يجب أن يكون حجمه أكبر من ضعف حجم العينة.

مثال (٥) : إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الاحتمالي التالي:

$$د(س) = ١٢ س^{٢}(١ - س) \quad \text{حيث صفر} \leqslant س \leqslant ١$$

سحبت عينة حجمها ١٠٠ مصباح فاحسب احتمال أن متوسط أعمارها يقل عن ٧ر٥ شهر.

الحل

$$\mu = \int_{.}^{١} س\, د(س)\, ء س$$

$$= ١٢ \int_{.}^{١} س^{٣}(١ - س)\, ء س$$

$$= \text{١٢} \left[\frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} - \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} \right]_{\text{٠}}^{\text{١}}$$

$$= \text{١٢} \left[\frac{\text{١}}{\text{٢٠}} \right] = \text{٦ر٠ سنة}$$

$$\sigma^{\text{٢}} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{س}^{\text{٢}} \ \text{د} \ (\text{س}) \ \text{ءس} - \mu^{\text{٢}}$$

$$= \text{١٢} \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{س}^{\text{٤}} - \text{س}^{\text{٥}}) \ \text{ءس} - (\text{٦ر٠})^{\text{٢}}$$

$$= \text{١٢} \left[\frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} - \frac{\text{س}^{\text{٦}}}{\text{٦}} \right]_{\text{٠}}^{\text{١}} - \text{٣٦ر٠}$$

$$= \text{١٢} \left[\frac{\text{١}}{\text{٣٠}} \right] - \text{٣٦ر٠}$$

$$= \text{٤٠ر٠} - \text{٣٦ر٠} = \text{٠٤ر٠}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\text{٠٤ر٠}} = \text{٢ر٠}$$

$$\mu(\bar{\text{س}}) = \mu = \text{٦ر٠}$$

$$\sigma(\bar{\text{س}}) = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{٢ر٠}}{\sqrt{\text{١٠٠}}} = \text{٠٢ر٠}$$

وحيث إن حجم العينة كبير($\text{ن} = \text{١٠٠}$)فإن $\bar{\text{س}}$ تتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٦ر٠ سنة وانحرافه المعياري ٠٢ر٠ سنة والمطلوب حساب $\text{ح} \ (\bar{\text{س}} \geqslant \text{٧} \frac{\text{١}}{\text{٢}} \ \text{شهر})$

$$\text{٧} \frac{\text{١}}{\text{٢}} \ \text{شهر} = \frac{\text{١٥}}{\text{٢٤}} \ \text{من السنة}$$

$$= \text{٦٢٥ر٠ سنة}$$

أي أن المطلوب حساب $\text{ح} \ (\bar{\text{س}} \geqslant \text{٦٢٥ر٠})$

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

$$ص = \frac{\overline{س} - ٠٫٦}{٠٫٠٢}$$

عندما $\overline{س} = ٠٫٦٢٥$

$$ص = \frac{٠٫٦٢٥ - ٠٫٦}{٠٫٠٢} = \frac{٠٫٠٢٥}{٠٫٠٢} = ١٫٢٥$$

$$\therefore ح(\overline{س} \leqslant ٠٫٦٢٥) = ح(ص \leqslant ١٫٢٥)$$

$$= ٠٫٥ + ح(صفر \leqslant ص \leqslant ١٫٢٥)$$

$$= ٠٫٥ + ٠٫٣٩٤٤$$

$$= ٠٫٨٩٤٤$$

مثال (٦) : إذا كانت الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق تتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثتين — أخذت عينة مكونة من ٦٤ أسبوعا فما احتمال أن يكون متوسط الحوادث فيهايزيد عن ٢٫٢ حادثة ؟

الحل

من التوزيع البواسوني نعلم أن: $\mu = ٢$

$$\sigma^{٢} = ٢$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{٢}$$

$$\mu(\overline{س}) = \mu = ٢$$

$$\sigma(\overline{س}) = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٦٤}} = \frac{\sqrt{٢}}{٨} = ٠٫١٧٧$$

وحيث إن حجم العينة كبير (ن = ٦٤) فإن $\overline{س}$ تتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٢ وانحرافه المعياري ٠٫١٧٧ والمطلوب حساب ح $(\overline{س} \geqslant ٢٫٢)$

نحول إلى توزيع طبيعي قياسي وذلك بوضع

ص = (س̄ − ٢) / ٠ر١٧٧

عندما س̄ = ٢ر٢

ص = (٢ر٢ − ٢) / ٠ر١٧٧ = ٠ر٢ / ٠ر١٧٧ = ١ر١٣

∴ ح(س̄ ≥ ٢ر٢) = ح (ص ≥ ١ر١٣)

= ٠ر٥ − ح (صفر ≤ ص ≤ ١ر١٣)

= ٠ر٥ − ٠ر٣٧٠٨ = ٠ر١٢٩٢

(٥ـ٦) ـ التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب:

عندما تكلمنا عن توزيعات المعاينة في البند (٥ـ ٢) ذكرنا أنها توزيعات احتمالية للمقاييس الإحصائية التي نحسبها من العينات كما ذكرنا أن الوسط الحسابي س̄ والانحراف المعياري ع للعينة ونسبة المفردات في العينة التي لها صفة معينة هى بعض هذه المقاييس وفي البند السابق حصلنا على التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية والآن نتعرف على التوزيع الاحتمالي لمجتمع النسب وسوف نتبع نفس الأسلوب الذي سلكناه في تقديم التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية.

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا ونسبة المفردات التي لها صفة معينة في هذا المجتمع هى P فإذا سحبنا من المجتمع عينة عشوائية كبيرة من المفردات حجمها ن وجدنا أن من بينها ر مفردة لها هذه الصفة المعينة الموجودة في المجتمع فإن النسبة $\frac{ر}{ن}$ والتي سنرمز لها بالرمز ل تعتبر متغيرا عشوائيا لأنها تتغير من عينة لأخرى. وبالتالي فإن هذه النسبة ل = $\frac{ر}{ن}$ يكون لها توزيع احتمالي تحدده النظرية التالية:

نظرية (٢) : إذا كانت P هى نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبت من هذا المجتمع عينات كبيرة حجم كل منها ن وكانت ل تمثل نسبة هذه الظاهرة في العينات فإن ل تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P وانحرافه المعياري: $\sigma(ل) = \sqrt{\frac{P(1-P)}{ن}}$

مثال (٧) : إذا علم أن نسبة الأحذية المعيبة التي تنتجها إحدى الآلات هى ٣٪ فإذا اشترى أحد المعارض ٤٠٠ حذاء من إنتاج هذه الآلة فما هو احتمال:

أ ــ أن يجد ٢٠ حذاء على الأقل معيبا؟

ب ـ أن يجد ١٦ حذاء على الأكثر معيبا ؟

الحل

نسبة الأحذية المعيبة في إنتاج الآلة (المجتمع) P = ٠٣ر٠

وحجم العينة $ن$ = ٤٠٠

نفرض أن نسبة الأحذية المعيبة في العينة = ل

نعلم أن ل تتبع توزيعا طبيعيا وسطه ٠٣ر٠ وانحرافه المعياري :

$$\sigma(ل) = \sqrt{\frac{P(1-P)}{ن}} = \sqrt{\frac{٠٣ر٠ \times ٩٧ر٠}{٤٠٠}} = ٠٠٨٥ر٠$$

أ ـ والمطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ٢٠ حذاء على الأقل .

ولكن العشرين حذاء تمثل نسبة $ل_1 = \frac{٢٠}{٤٠٠} = ٠٥ر٠$

في العينة و بهذا يكون المطلوب معرفة احتمال أن تكون نسبة المعيب في العينة ٠٥ر٠ فأكثر أي المطلوب :

حساب $ح (ل_1 \geq ٠٥ر٠)$

نضع : $ص = \frac{ل_1 - P}{\sigma(ل_1)} = \frac{ل_1 - ٠٣ر٠}{٠٠٨٥ر٠}$

$\therefore$ ص تتبع توزيعا طبيعيا قياسيا

عندما $ل_1 = ٠٥ر٠$

فإن $ص = \frac{٠٥ر٠ - ٠٣ر٠}{٠٠٨٥ر٠} = ٣٥ر٢$

$$\therefore ح (ل_1 \geq ٠٥ر٠) = ح (ص \geq ٣٥ر٢)$$

$$= ٥ر٠ - ح (صفر \leq ص \leq ٣٥ر٢)$$

$$= ٥ر٠ - ٤٩٠٦ر٠ = ٠٠٩٤ر٠$$

ب ـ المطلوب معرفة احتمال أن يكون عدد الأحذية المعيبة في العينة ١٦ حذاء على الأكثر ـ أي أن تكون نسبة الأحذية المعيبة في العينة هى $ل_2 = \frac{١٦}{٤٠٠} = ٠٤ر٠$ على الأكثر. أي المطلوب حساب

$$ح (ل_2 \leq ٠٤ر٠)$$

نضع :

$$ص = \frac{ل_٢ - P}{\sigma(ل_٢)}$$

$$= \frac{ل_٢ - ٠٫٠٣}{٠٫٠٠٨٥}$$

∴ ص تتبع توزيع طبيعى قياسى

عندما $ل_٢ = ٠٫٠٤$

فإن $ص = \frac{٠٫٠٤ - ٠٫٠٣}{٠٫٠٠٨٥} = ١٫١٨$

∴ $ح(ل_٢ \geqslant ٠٫٠٤) = ح(ص \geqslant ١٫١٨)$

$= ٠٫٥ + ح(صفر \geqslant ص \geqslant ١٫١٨)$

$= ٠٫٥ + ٠٫٣٨١٠ = ٠٫٨٨١٠$

مثال (٨) : إذا كانت نسبة الطلاب الراسبين في جامعة ما هى ٩٪ وأخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠٠ طالب. فما هو احتمال أن نجد في هذه العينة ٧٠ طالبا على الأكثر راسبين ؟

الحل

نسبة الطلاب الراسبين في الجامعة = ٠٫٠٩

وحجم العينة ن = ١٠٠٠ طالب

نفرض أن ل هى نسبة الطلاب الراسبين في عينات حجمها ١٠٠٠ طالب

∴ ل تتبع توزيعا طبيعيا وسطه = ٠٫٠٩ وانحرافه المعياري

$$\sigma(ل) = \sqrt{\frac{P(١ - P)}{ن}} = \sqrt{\frac{٠٫٠٩ \times ٠٫٩١}{١٠٠٠}} = ٠٫٠٠٩$$

وبما أن عدد الطلاب الراسبين في العينة ٧٠ طالبا

نسبة الطلاب الراسبين في العينة = ٠٫٠٧

والمطلوب هو حساب:

$$ح(ل \geqslant ٠٫٠٧)$$

نضع

$$ص = \frac{ل - ٠٫٠٩}{٠٫٠٠٩}$$

∴ ص تتبع توزيع طبيعي قياسي

عندما ل = ٠٧ر٠

ص = $\frac{\text{٠٧ر٠} - \text{٠٩ر٠}}{\text{٠٠٩ر٠}}$ = $\frac{-\text{٠٢ر٠}}{\text{٠٠٩ر٠}}$ = − ٢٢ر٢

∴ ح (ل $\geq$ ٠٧ر٠) = ح (ص $\geq$ − ٢٢ر٢)

= ٥ر٠ − ح (صفر $\geq$ ص $\geq$ ٢٢ر٢)

= ٥ر٠ − ٤٨٦٨ر٠

= ٠١٣٢ر٠

(٥ـ٧) ـ التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق بين متوسطين :

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما:

$س_{11}$ ، $س_{21}$ ، ......

$س_{12}$ ، $س_{22}$ ، ....

متوسط الأول μ_1 وتباينه σ_1^2 ومتوسط الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2 فإذا سحبنا عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_1$ مفردة ووجدنا وسطها الحسابي $\bar{س}_1$ وانحرافها المعياري $ع_1$ وسحبنا عينة من المجتمع الثاني حجمها $ن_2$ مفردة ووجدنا وسطها الحسابي $\bar{س}_2$ وانحرافها المعياري $ع_2$

نفرض أننا حسبنا الفرق بين الوسطين فوجدنا:

ف = $\bar{س}_1 - \bar{س}_2$.

نلاحظ أن $\bar{س}_1$ ما هي إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها $ن_1$ والمسحوبة من المجتمع الأول و $\bar{س}_2$ ما هي كذلك إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها $ن_2$ مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني، وعلى ذلك فإن ف تعتبر قراءة في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات التي يمكن أخذها من المجتمعين والتي حجمها $ن_1$ مفردة من الجتمع الأول و $ن_2$ من المجتمع الثاني. والنظرية الآتية تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق ف = $\bar{س}_1 - \bar{س}_2$ عندما يكون حجم العينات كبيرا.

نظرية (٣) : مجتمع الفروق ف يتبع توزيعا طبيعيا وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ وانحرافه المعياري σ (ف)

حيث: $\sigma(\text{ف}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}$ ،

مثال (٩) : مصنعان لإنتاج المصابيح الكهربائية متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ١٥٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ٢٠٠ ساعة بينما متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري ١٥٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ١٥٠ مصباحا من المصنع الأول وعينة أخرى حجمها ١٢٥ مصباحا من إنتاج المصنع الثاني لاختبارهما فأوجد:

إحتمال أن يزيد متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الأول ٢٥٠ ساعة على الأقل عن متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع الثاني

الحل

$\mu_1 =$ ١٥٠٠ ساعة

$\sigma_1 =$ ٢٠٠ ساعة

$n_1 =$ ١٥٠ مصباح

$\mu_2 =$ ١٢٠٠ ساعة

$\sigma_2 =$ ١٥٠ ساعة

$n_2 =$ ١٢٥ مصباح

نفرض أن $\bar{x}_1$ هى متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الأول و$\bar{x}_2$ هى متوسط عمر المصباح في العينة المسحوبة من المصنع الثاني.

$\therefore$ ف $= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

ف تتبع توزيعا طبيعيا وسطه $= (\mu_1 - \mu_2)$ وانحرافه المعياري هو:

$$\sigma(\text{ف}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(200)^2}{150} + \frac{(150)^2}{125}} = 21 \text{ ساعة}$$

و يكون المطلوب حساب:

ح (ف $\geq$ ٢٥٠)

نضع ص $= \dfrac{\text{ف} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma(\text{ف})} = \dfrac{\text{ف} - 300}{21}$

حيث ص تعتبر متغيرا طبيعيا قياسيا .

عندما ف = ٢٥٠

$$ص = \frac{٢٥٠ - ٣٠٠}{٢١} = \frac{- ٥٠}{٢١} = - ٢٫٣٨$$

$$\therefore ح (ف \leq ٢٥٠) = ح (ص \leq - ٢٫٣٨)$$

$$= ٠٫٥ + ح (صفر \leq ص \leq ٢٫٣٨)$$

$$= ٠٫٥ + ٠٫٤٩١٠ = ٠٫٩٩١$$

ملحوظة (٣): إذا كانت العينتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط (أي أن $\mu_1 = \mu_2$) فإن مجتمع الفروق يكون له توزيع طبيعي وسطه الصفر وانحرافه المعياري σ (ف) [حيث أن σ (ف) كما هي معرفة سابقا] .

(٥ــ٨) ــ التوزيع الاحتمالي لمجتمع الانحرافات المعيارية:

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا من المفردات له توزيع طبيعي وسطه μ وانحرافه المعياري σ ونفرض أننا سحبنا عينات حجم كل منها ن من هذا المجتمع وحسبنا التباين $ع^2$ لكل عينة ــ حيث :

$$ع^2 = \frac{1}{ن} \sum_{ر} (س_ر - \overline{س})^2$$

، $س_ر$ هي مفردات العينة

نجد أن قيمة $ع^2$ تتغير من عينة لأخرى وعلى ذلك فإن $ع^2$ متغير عشوائي له توزيع احتمالي تعطيه النظرية الآتية :

نظرية (٤) : $\frac{ن ع^2}{\sigma^2}$ متغير عشوائي يتبع توزيع $كا^2$ بدرجات حرية (ن ــ ١) . و يعتبر التوزيع الاحتمالي للمقدار $\frac{ن ع^2}{\sigma^2}$ من التوزيعات الاحتمالية التي يتطلب منا استخدامها المباشر في النواحي التطبيقية دراسة في نظرية الاحتمالات أعمق مما يمكن تقديمه على مستوى هذا الكتاب ــ لهذا نكتفي بذكر هذا التوزيع كما هو موضح في الفقرة السابقة وذلك حتى يمكن الاستفادة منه في الباب التالي عندما نتكلم عن تقدير فترة ثقة لتباين المجتمع σ^2 .

* * *

تماريـــن

١ مجتمع مكون من المفردات ٦ ، ٩ ، ١١ ، ١٥ ، ١٧
احصر كل العينات الممكن سحبها (مع الإرجاع) من هذا المجتمع والتي حجم كل منها مفردتان ثم أوجد:
أ ــ متوسط المجتمع وانحرافه المعياري .
ب ــ متوسط مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وانحرافه المعياري .
جـ ــ تحقق من صحة نتائجك بمقارنة النتائج في أ ، ب .

٢ ــ حل التمرين السابق إذا كان سحب مفردات العينة من المجتمع يتم بدون إرجاع .

٣ ــ مصنع لإنتاج نوع معين من المصابيح الكهربائية ــ إذا علم أن متوسط عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع ٨٠٠ ساعة والانحراف المعياري ٦٠ ساعة سحبت عينة عشوائية حجمها ٦٤ مصباحا فما هو احتمال أن متوسط عمر المصباح في العينة:
أ ــ ينحصر بين ٧٩٠ ، ٨١٠ ساعة ؟
ب ــ يقل عن ٧٨٥ ساعة ؟
جـ ــ يزيد عن ٨٢٠ ساعة ؟

٤ ــ وصل إلى أحد مستودعات للتخزين نوع معين من الطرود متوسط وزن كل منها ٨٠ كيلو جرام وانحرافه المعياري ١٦ كيلو جرام ــ فاذا وضع عشوائيا ٢٥ طردا على مصعد داخل المخزن لرفعها إلى مكان تخزينها . فما هو احتمال أن لا تزيد هذه الحمولة عن الوزن المسموح به للمصعد وقدره ٢٢٠٠ كيلو جرام ؟

٥ ــ إذا كانت نسبة المواليد الذكور في مجتمع ما هى ٥١ر٠ فما هو احتمال أن نحصل على :
أ ــ أقل من ٤٥٪ ذكور ؟
ب ــ ما بين ٤٥٪ إلى ٦٠٪ إناث ؟
جـ ــ أكثر من ٥٥٪ ذكور ؟
وذلك في ٢٠٠ حالة ولادة .

٦ ــ حل التمرين السابق إذا كان عدد الولادات ١٠٠ ولادة بدلا من ٢٠٠ ــ موضحا الفرق بين النتائج في الحالتين .

٧ ــ اشترى تاجر ١٠٠٠ صندوق تفاح من أحد مراكز توزيع الفاكهة والمعروف أن ٥٪ من التفاح الذي يعبئه هذا المركز فاسد . فما هو العدد المتوقع للصناديق التي تحتوي على :
أ ــ أكثر من ٩٠ تفاحة جيدة ؟

ب ــ ٩٨ تفاحة أو أكثر جيدة ؟

علما بأن كل صندوق يحتوي على ١٠٠ تفاحة .

٨ ــ آلتان للانتاج ــ معلوم لدينا أن متوسط عدد الوحدات التي تنتجها الآلة الأولى ٤٠٠٠ وحدة في اليوم الواحد بانحراف معياري ٣٠٠ وحدة والمتوسط اليومي لعدد الوحدات المنتجة بالآلة الثانية ٤٥٠٠ وحدة بانحراف معياري ٢٠٠ وحدة ــ أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ يوم من إنتاج الآلة الأولى وعينة أخرى حجمها ٥٠ يوما من إنتاج الآلة الثانية ــ فما احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي إنتاج الآلتين (في العينتين) :

أ ــ ٦٠٠ وحدة على الأقل ؟

ب ــ ٤٥٠ وحدة على الأكثر ؟

٩ ــ في أحد اختبارات الذكاء لمجموعة كبيرة من الطلاب كان متوسط الدرجات ٧٥ درجة والانحراف المعياري ٨ درجات ــ اخترنا عشوائيا مجموعتين من هؤلاء الطلاب حجم المجموعة الأولى ٣٠ طالبا وحجم المجموعة الثانية ٤٠ طالبا ــ فما هو احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي الدرجات في المجموعتين :

أ ــ ثلاث درجات أو أكثر ؟

ب ــ منحصرا بين درجتين وستة درجات ؟

جـ ــ خمسة درجات أو أقل ؟

* * *

الباب السادس

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة
(العينات الكبيرة)



تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة
(العينات الكبيرة)

(٦ـ١) ـ معالم المجتمع وإحصاءات العينة:

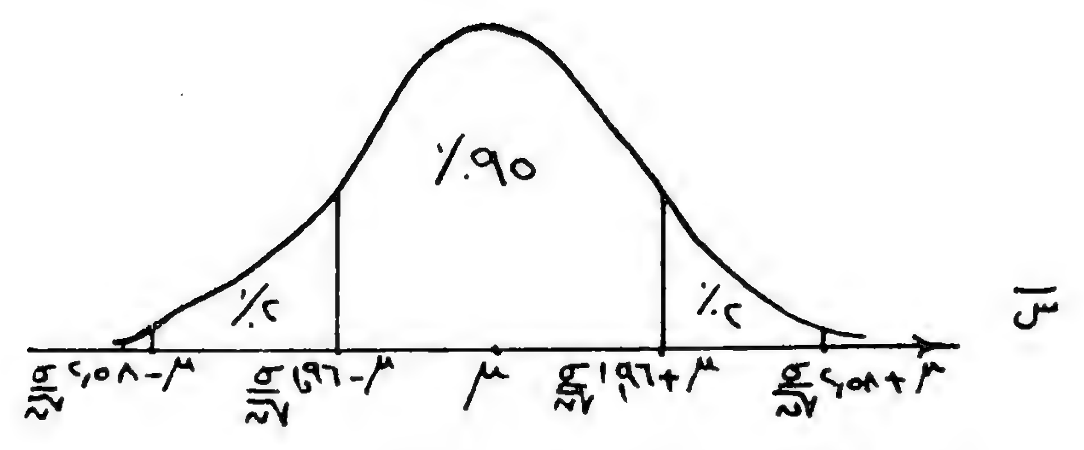
كما نعلم أن الهدف الأساسي من دراسة مجتمع ما هو ايجاد أو تقدير بعض خصائصه مثل المتوسط μ والانحراف المعياري σ ونسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع P وغير ذلك من أدلة توصيف المجتمعات ـ وهذه الخصائص تعتبر من أهم المعالم التي تحدد شكل كل مجتمع ولذلك فهي تسمى بمعالم المجتمع أو بارامترات المجتمع (parameters) ـ وهي ثوابت لأن قيمتها ثابتة لا تتغير. وهذه المعالم غالبا ما تكون مجهولة ونرغب في معرفة قيمتها.

وحيث أن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة من المجتمع فإننا نلجأ دائما إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة وذلك من بيانات العينة والمقياس المحسوب من العينة يسمى إحصاء (Statistic). ولكل إحصاء أسلوب خاص في حسابه سنتكلم عنه فيما بعد ـ والإحصاءات المناظرة للمعالم μ ، σ ، P هي الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ والانحراف المعياري للعينة ع ونسبة الظاهرة في العينة ل على الترتيب. والإحصاء يعتبر متغيرا لأنه يتغير من عينة لأخرى. فمثلا الوسط الحسابي الذي نحصل عليه من عينة ما يختلف عن ذلك الذي نحصل عليه من عينة أخرى حتى ولو كانت العينتان مسحوبتين من مجتمع واحد.

وحيث أن الإحصاءات متغيرات فإن لكل منها توزيعا احتماليا معينا. فمثلا قد وجدنا أن الإحصاء $\bar{س}$ متغير عشوائي له توزيع احتمالي طبيعي عندما يكون حجم العينة كبيرا.

(٦ـ٢) ـ تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة:

نفرض أن لدينا مجتمعا كبيرا وسطه μ وانحرافه المعياري σ ونرغب في معرفة القيمة المجهولة لمتوسط هذا المجتمع ـ لذلك نسحب عينة عشوائية كبيرة حجمها ($ن > ٣٠$ مفردة) ونحسب من هذه العينة الوسط الحسابي $\bar{س}$ والانحراف المعياري ع. كما نعلم فإن الإحصاء $\bar{س}$ في هذه الحالة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$. والآن نستخدم هذا التوزيع الاحتمالي في تقدير متوسط المجتمع μ. ويمكن رسم منحنى هذا التوزيع كما يلي:



ومن خصائص التوزيع الاحتمالي السابق نعرف أن:

احتمال أن تقع س̄ بين μ − ١ر٩٦ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ، μ + ١ر٩٦ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

يساوي ٩٥ر٠

أي أن احتمال أن تختلف س̄ عن μ بمقدار ١ر٩٦ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ بالزيادة أو بالنقص يساوي ٩٥ر٠

ويمكن كتابة ذلك على النحو التالي :

$$ح \left[\bar{س} - ١ر٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leqslant \mu \leqslant \bar{س} + ١ر٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right] = ٩٥ر٠$$

وهذا يعطي لنا حدين ، حد أعلى وحد أدنى تقع بينهما μ كما يحدد لنا قيمة احتمالية توضح لنا مدى ثقتنا في أن تقع μ بين هذين الحدين . وتسمى القيمة الاحتمالية بدرجة الثقة كما يسمى الحد (س̄ − ١ر٩٦ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$) بحد الثقة الأدنى والحد (س̄ + ١ر٩٦ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$) بحد الثقة الأعلى والفترة بينهما تسمى فترة الثقة : و يسمى المقدار ١ر٩٦ بالدرجة المعيارية وهى قيمة المتغير الطبيعي القياسي (ص) المناظر للاحتمال ٩٥ر٠

بمعنى أن $ح (- ١ر٩٦ \leqslant ص \leqslant ١ر٩٦) = ٩٥ر٠$

وحيث أن ص = ٢ر٥٨ تناظر احتمال ٩٩ر٠ فيمكن استبدال القيمة ١ر٩٦ بالقيمة ٢ر٥٨ واستبدال درجة الثقة ٩٥ر٠ بدرجة الثقة ٩٩ر٠ و بهذا نحصل على فترة الثقة التالية :

$$ح \left(\bar{س} - ٢ر٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \leqslant \mu \leqslant \bar{س} + ٢ر٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right) = ٩٩ر٠$$

و بصفة عامة يمكن استخدام أي قيمة للتوزيع الطبيعي القياسي (ص) غير القيمتين ١ر٩٦ ، ٢ر٥٨ وهذا يترتب عليه تغيير درجة الثقة . والصيغة العامة لفترات الثقة هى :

$$\text{ح}\left(\bar{\text{س}} - \text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \leq \mu \leq \bar{\text{س}} + \text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right) = 1 - \alpha$$

حيث أن: (١ — α) هى درجة الثقة .

، $\text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}$ هى قيمة المتغير الطبيعي القياسي المناظر لدرجة الثقة (١ — α) .

فإذا أردنا استخدام درجة ثقة ٩٥٪ فإن $\text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}$ = ١ر٩٦ . وكذلك عند درجة الثقة ٩٩٪ نجد أن $\text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}$ = ٢ر٥٨ .

ويمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد قيمة $\text{ص}_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لأي درجة ثقة نرغبها .

ملحوظة (١): عند تقدير μ باستخدام فترات الثقة السابقة نجد أننا نحتاج لمعرفة σ التي عادة تكون مجهولة لذلك نستخدم الانحراف المعياري للعينة ع بدلا من σ كنوع من التقريب .

مثال (٨) : مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية . سحبت من إنتاجه عينة عشوائية حجمها ١٠٠ مصباح . فإذا كان متوسط عمر المصباح في العينة هو ١٢٠٠ ساعة وانحرافه المعياري هو ٢٥٠ ساعة فماذا تستنتج عن متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع كله ؟

الحل

$$\bar{\text{س}} = \text{١٢٠٠} \qquad , \qquad \text{ع} = \text{٢٥٠}$$

نفرض أن μ متوسط عمر المصباح في إنتاج المصنع .

عند درجة ثقة ٩٥ر٠ يكون :

$$\text{ح}\left[\bar{\text{س}} - \text{١ر٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{١٠٠}}} \leq \mu \leq \bar{\text{س}} + \text{١ر٩٦}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{١٠٠}}}\right] = \text{٠ر٩٥}$$

وحيث أن σ مجهولة نستخدم ع بدلا منها وعلى ذلك فإن :

$$\text{ح}\left[\text{١٢٠٠} - \text{١ر٩٦}\frac{\text{٢٥٠}}{\sqrt{\text{١٠٠}}} \leq \mu \leq \text{١٢٠٠} + \text{١ر٩٦} \times \frac{\text{٢٥٠}}{\sqrt{\text{١٠٠}}}\right] = \text{٠ر٩٥}$$

أى أن

$$\text{ح}\left[\text{١٢٠٠} - \text{٤٩} \leq \mu \leq \text{١٢٠٠} + \text{٤٩}\right] = \text{٠ر٩٥}$$

$$\therefore \text{ح}\left[1151 \leq \mu \leq 1249\right] = 0.95$$

ومعنى هذا أننا نتوقع أن يتراوح عمر المصباح من إنتاج هذا المصنع بين ١١٥١ ساعة و١٢٤٩ ساعة وأننا نثق في هذا القرار بدرجة ثقة ٩٥ر٠

ملحوظة (٢) : فترات الثقة السابقة كلها خاصة بالمجتمعات الكبيرة ولكن إذا كان المجتمع محدودا فإننا نستبدل الانحراف المعياري للوسط الحسابي $\frac{\sigma}{\sqrt{\text{نه}}}$ بما يناظره في حالة المجتمعات المحدودة وهو $\frac{\sigma}{\sqrt{\text{نه}}}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{نه}}{\text{ن}-1}}$ وعلى ذلك فإن فترات الثقة في حالة المجتمعات المحدودة تكون كالآتي:

$$\text{ح}\left[\bar{\text{س}} - \text{ص}_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{نه}}}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{نه}}{\text{ن}-1}} \leq \mu \leq \bar{\text{س}} + \text{ص}_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\text{نه}}}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{نه}}{\text{ن}-1}}\right] = 1 - \alpha$$

حيث أن : ن هى حجم المجتمع

، نه هى حجم العينة

مثال (٨) : سحبت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ طالبا من طلبة كلية الاقتصاد والإدارة البالغ عددهم ألف طالب. فإذا كان متوسط عمر الطالب في العينة ٢٠ سنة والانحراف المعياري ٣ سنوات فأوجد بدرجة ثقة ٩٩٪ متوسط عمر الطالب في الكلية.

الحل

$$\bar{\text{س}} = 20 \quad ، \quad \text{ع} = 3$$

$$\text{ن} = 1000 \quad ، \quad \text{نه} = 50$$

وعلى ذلك فإن:

$$\text{ح}\left[\bar{\text{س}} - 2.58\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{نه}}}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{نه}}{\text{ن}-1}} \leq \mu \leq \bar{\text{س}} + 2.58\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{نه}}}\sqrt{\frac{\text{ن}-\text{نه}}{\text{ن}-1}}\right] = 0.99$$

$$\therefore \text{ح} \left[٢٠ - ٢٫٥٨ \frac{٣}{\sqrt{٥٠}} \sqrt{\frac{٩٥٠}{٩٩٩}} \le \mu \le ٢٠ \times ٢٫٥٨ \times \right.$$

$$\left. \frac{٣}{\sqrt{٥٠}} \sqrt{\frac{٩٥٠}{٩٩٩}} \right] = ٠٫٩٩$$

$$\therefore \text{ح} \left[٢٠ - ١٫٠٧ \le \mu \le ٢٠ + ١٫٠٧ \right] = ٠٫٩٩$$

$$\therefore \text{ح} \left[١٨٫٩٣ \le \mu \le ٢١٫٠٧ \right] = ٠٫٩٩$$

أي أن متوسط عمر الطالب في الكلية يتراوح بين ١٨٫٩٣ عاما و٢١٫٠٧ عاما تقريبا وذلك بدرجة ثقة ٩٩٪.

مثال (٩) : سحبت عينة مكونة من ٥٠ طالبا من طلبة كلية الاقتصاد والادارة البالغ عددهم ألف طالب وكان توزيع أعمار الطلبة في العينة كما يلي :

فئات العمر بالسنوات	١٧ −	١٩ −	٢١ −	٢٣	٢٥−٢٧	المجموع
عدد الطلبة	١٣	٢٥	٦	٤	٢	٥٠

والمطلوب : تقدير متوسط العمر بدرجة ثقة ٩٩٪.

نبدأ أولا بإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري من بيانات العينة كما يلي :

فئات العمر	عدد الطلبة ك	مراكز الفئات س	س − ٢٠	$\text{ح} = \frac{\text{س} - ٢٠}{٢}$	ح × ك	$\text{ح}^{٢} \times \text{ك}$
١٧−	١٣	١٨	− ٢	− ١	− ١٣	١٣
١٩−	٢٥	٢٠	صفر	صفر	صفر	صفر
٢١−	٦	٢٢	٢	١	٦	٦
٢٣−	٤	٢٤	٤	٢	٨	١٦
٢٥−٢٧	٢	٢٦	٦	٣	٦	١٨
المجموع	٥٠				٧	٥٣

$$\bar{\text{س}} = ٢٠ + \frac{٧}{٥٠} \times ٢ = ٢٠ + ٠٫٢٨ = ٢٠٫٢٨ \text{ سنة}$$

$$\text{ع} = ٢ \times \sqrt{\frac{٥٣}{٥٠} - \left(\frac{٧}{٥٠} \right)^{٢}}$$

= ٢ × √(١ر٠٦ − ٠ر٠٢) = ٢ × √١ر٠٤

= ٢ × ١ر٠٢ = ٢ر٠٤ سنة

والآن يمكن استكمال الحل كما في المثال السابق تماما حيث أن :

س̄ = ٢٠ر٢٨ ، ع = ٢ر٠٤

ن = ١٠٠٠ ، ن = ٥٠

وعلى ذلك يكون :

ح[٢٠ر٢٨ − ٢ر٥٨ × (٢ر٠٤ / √٥٠) √((١٠٠٠ − ٥٠) / (١٠٠٠ − ١)) ≥ μ ≥ ٢٠ر٢٨ + ٢ر٥٨

× (٢ر٠٤ / √٥٠) √((١٠٠٠ − ٥٠) / (١٠٠٠ − ١))] = ٠ر٩٩

ح[٢٠ر٢٨ − ٠ر٧٣ ≥ μ ≥ ٢٠ر٢٨ + ٠ر٧٣] = ٠ر٩٩

ح[١٩ر٥٥ ≥ μ ≥ ٢١ر٠١] = ٠ر٩٩

أي أننا نتوقع أن ينحصر متوسط عمر الطالب في الكلية بين ١٩ر٥٥ عاما و٢١ر٠١ عاما ودرجة ثقتنا في هذا القرار هى ٩٩٪ .

(٦ــ٣) ــ تقدير نسبة وجود ظاهرة معينة في المجتمع :

أحيانا يكون من المرغوب فيه معرفة نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما مثل نسبة الأميين في مدينة كبيرــ أو نسبة العاطلين في الدولة ــ أو نسبة الذكور في بلد ما أو ما شابه ذلك .

في هذه الحالة يمكن استخدام بيانات العينة لتقدير هذه النسبة في المجتمع . تماما مثل حالة الوسط الحسابي ــ ولإيضاح ذلك سنرمز للنسبة في المجتمع بالرمز P والنسبة المحسوبة من العينة بالرمز ل . وكما تكلمنا عن نظرية النزعة المركزية نود أن نذكر أنه يوجد نظرية أخرى تسمى نظرية الأعداد الكبيرة للعالم الإحصائي « دى موافر» وفيما يلي نص هذه النظرية :

نظرية (١) : إذا كانت P هى نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما وسحبت منه عينات كبيرة حجم كل منها ن وكانت ل هى نسبة هذه الظاهرة في العينات فان ل تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P وانحرافه المعياري σ (ل) .

حيث إن:

$$\sigma(ل) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}} & \text{إذا كان المجتمع كبيرا} \\ \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\dfrac{ن-n}{ن-1}} & \text{إذا كان المجتمع محدودا وحجمه ن.} \end{cases}$$

وعادة عند حساب σ (ل) نستخدم نسبة الظاهرة في العينة ل بدلا من النسبة P حيث تكون P عادة مجهولة وعلى هذا يمكن استخدام النظرية السابقة لإيجاد فترة الثقة للنسبة P على الصورة التالية:

$$ح\left[ل - ص_{\alpha/2} \times \sigma(ل) \leq P \leq ل + ص_{\alpha/2}\,\sigma(ل)\right] = 1 - \alpha.$$

حيث $ص_{\alpha/2}$ هى قيمة المتغير الطبيعي القياسي السابق تعريفها.

مثال (١٠): في مصنع لإنتاج الأحذية أخذت عينة عشوائية حجمها n = ٥٠٠ حذاء ووجد أن ١٠٠ حذاء منها معيبة ــ أوجد بدرجة ثقة ٩٥٪ نسبة المعيب في الإنتاج كله.

الحل

عند درجة الثقة ٩٥٪ تكون $ص_{\alpha/2}$ = ١٫٩٦

نسبة المعيب في العينة ل = $\frac{١٠٠}{٥٠٠}$ = ٠٫٢

حجم العينة n = ٥٠٠

نفرض أن نسبة المعيب في الإنتاج كله P

$$\therefore \sigma(ل) = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

وحيث أن P مجهولة لذلك نستخدم النسبة ل بدلا من P كنوع من التقريب في تقدير σ (ل) وبذلك تكون

$$\sigma(ل) = \sqrt{\frac{ل(1-ل)}{n}} = \sqrt{\frac{٠٫٢ \times (1 - ٠٫٢)}{٥٠٠}} = ٠٫٠١٧٩$$

وحيث أن:

$$ح\left[ل - ١٫٩٦\,\sigma(ل) \leq P \leq ل + ١٫٩٦\,\sigma(ل)\right] = ٠٫٩٥$$

$$\therefore ح\left[٠٫٢ - ١٫٩٦ \times ٠٫٠١٧٩ \leq P \leq ٠٫٢ + ١٫٩٦ \times ٠٫٠١٧٩\right] = ٠٫٩٥$$

$$\therefore ح\,[\,٠٫١٦٥ \leqslant P \leqslant ٠٫٢٣٥\,] = ٠٫٩٥$$

أي نتوقع أن تقع P بين ١٦٥ر٠ ، ٢٣٥ر٠ وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪ .

مثال (١١) : أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ رجل من إحدى القرى الصغيرة ووجد أن نسبة الأميين فيها ٧٥٪ فما الذي تستنتجه عن نسبة الأميين من الرجال في القرية كلها إذا علمت أن عدد رجال القرية ٥٠٠ رجل؟

الحل

نستخدم مثلا درجة ثقة ٩٩٪ فتكون $ص_{\frac{\alpha}{2}}$ = ٢٫٥٨ والنسبة في العينة ل = ٠٫٧٥ وحجم العينة ن = ١٠٠

نفرض أن نسبة الأميين بين رجال القرية P

وحيث أن المجتمع حجمه ٥٠٠ فرد فهو مجتمع محدود وعلى هذا تكون

$$\sigma(ل) = \sqrt{\frac{ل\,(١ - ل)}{ن} \times \left(\frac{N - ن}{N - ١}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٠٫٧٥ \times ٠٫٢٥}{١٠٠} \times \left(\frac{٥٠٠ - ١٠٠}{٥٠٠ - ١}\right)} = ٠٫٠٣٩$$

$$\therefore ح\,[\,ل - ٢٫٥٨\;\sigma(ل) \leqslant P \leqslant ل + ٢٫٥٨\;\sigma(ل)\,]$$

$$= ٠٫٩٩$$

$$\therefore ح\,[\,٠٫٧٥ - ٢٫٥٨ \times ٠٫٠٣٩ \leqslant P \leqslant ٠٫٧٥ + ٢٫٥٨ \times ٠٫٠٣٩\,]$$

$$= ٠٫٩٩$$

$$\therefore ح\,[\,٠٫٦٥ \leqslant P \leqslant ٠٫٨٥\,] = ٠٫٩٩$$

أي نتوقع أن تنحصر نسبة الأميين لرجال القرية بين ٦٥٪ ، ٨٥٪ وذلك بدرجة ثقة ٩٩٪ .

ملحوظة (٣) : عندما نقول أن درجة الثقة في نتيجة معينة ٩٥٪ يكون معنى ذلك أن ٩٥٪ من العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأصلي تعطي مثل هذه النتيجة .

(٦ــ٤) ــ إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين :

نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين المجتمع الأول متوسطه μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 والمجتمع الثاني متوسطه μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 ونفرض أن متوسطي المجتمعين مجهولان ولا يهمنا معرفة كل منهما على حدة ولكن يهمنا تقدير الفرق بينهما أي نرغب في تقدير $(\mu_1 - \mu_2)$ بفترة ثقة مناسبة.

ويمكننا إيجاد فترة الثقة المطلوبة وذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ ــ نسحب عينة كبيرة حجمها n_1 من المجتمع الأول ثم نحسب متوسطها الحسابي $\bar{س}_1$ وانحرافها المعياري $ع_1$.

ب ــ نسحب عينة كبيرة حجمها n_2 من المجتمع الثاني ونحسب متوسطها الحسابي $\bar{س}_2$ وانحرافها المعياري $ع_2$.

جـ ــ نعلم من نظرية (٣) في البند (٥ ــ ٧) أن الفرق

ف = $\bar{س}_1 - \bar{س}_2$ يتبع توزيع طبيعى وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$

وانحرافه المعيارى :

$$\sigma(ف) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

وعلى ذلك فان

$$ص = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}}}$$

يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا.

د ــ من خواص التوزيع الطبيعي القياسي نجد أن:

$$ح\left[-١٫٩٦ \leqslant ص \leqslant ١٫٩٦\right] = ٠٫٩٥$$

وهذا الاحتمال يكافىء :

$$ح\left[-١٫٩٦ \times \sigma(ف) \leqslant (\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \leqslant ١٫٩٦\,\sigma(ف)\right] = ٠٫٩٥$$

وهذا يوضح أن احتمال أن تختلف ف = $\bar{س}_1 - \bar{س}_2$ عن $(\mu_1 - \mu_2)$

بمقدار ١٫٩٦ σ (ف) بالزيادة أو النقص يساوى ٠٫٩٥

أى احتمال أن تنحصر (μ_1 - μ_2) بين ف ــ

١٫٩٦ σ (ف)

، ف + ١٫٩٦ σ (ف) يساوى ٠٫٩٥

هذه العبارة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة التالية :

ح [ف - ١٫٩٦ σ (ف) $\leqslant$ μ_1 - μ_2 $\leqslant$

ف + ١٫٩٦ σ (ف)] = ٠٫٩٥

أي نستطيع القول بأن الفرق بين متوسطي المجتمعين (μ_1 - μ_2)
ينحصر بين ف $\pm$ ١٫٩٦ σ (ف) وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪
وعلى ذلك تكون فترة الثقة المطلوبة هى :

ف - ١٫٩٦ σ (ف) ، ف + ١٫٩٦ σ (ف)
بدرجة ثقة ٩٥٪

وإذا أردنا إيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة ٩٩٪ فكما نعلم نستبدل ١٫٩٦ بالقيمة ٢٫٥٨ .
و بصفة عامة يمكن كتابة فترة الثقة في الصورة الآتية :

ح [ف - ص$_{\alpha/2}$ σ (ف) $\leqslant$ μ_1 - μ_2 $\leqslant$

ف + ص$_{\alpha/2}$ σ (ف)] = ١ - α

حيث أن :

(١ - α) هى درجة الثقة

، ص$_{\alpha/2}$ هى قيمة المتغير الطبيعي القياسي التي تحصر على يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$.

و بذلك يكون :

الحد الأدنى لفترة الثقة = ف - ص$_{\alpha/2}$ σ (ف)

، الحد الأعلى لفترة الثقة = ف + ص$_{\alpha/2}$ σ (ف)

ودرجة الثقة = ١ - α

حيث أن :

ف = $\bar{س}_1$ - $\bar{س}_2$

، $\sigma(\text{ف}) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\text{ن}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\text{ن}_2}}$

ملحوظة (١) : عادة تكون σ_1، σ_2 مجهولتان لذلك فإننا في مثل هذه الحالات نستخدم بدلا منهما الانحراف المعياري للعينة الأولى ع_1 والانحراف المعياري للعينة الثانية ع_2 على الترتيب.

مثال (١٢) : أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بهاء ٥٠ تلميذا والثانية بها ١٠٠ تلميذ واستعملت طريقة خاصة لتدريس الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى بينما استعملت طريقة أخرى عادية للمجموعة الثانية. وفي نهاية الدورة الدراسية وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٤ درجات بينما كان متوسط المجموعة الثانية ٦٠ درجة والانحراف المعياري ٥ درجات ــ كوّن لنا فكرة واضحة عن مدى تأثير الطريقة الخاصة في التدريس وذلك بإنشاء فترة ثقة مناسبة للفرق بين المتوسطين.

الحل

$\text{ن}_1 = ٥٠$ ، $\overline{\text{س}}_1 = ٦٥$ درجة ، $\text{ع}_1 = ٤$ درجات

$\text{ن}_2 = ١٠٠$ ، $\overline{\text{س}}_2 = ٦٠$ درجة ، $\text{ع}_2 = ٥$ درجات

إذا اخترنا درجة الثقة ٩٥٪ فإن فترة الثقة تكون كما يلي:

∵ ف = ٦٥ − ٦٠ = ٥

، $\sigma(\text{ف}) = \sqrt{\frac{١٦}{٥٠} + \frac{٢٥}{١٠٠}} = ٧٧٥ر٠$

∴ الحد الأدنى لفترة الثقة = ف − ١ر٩٦ σ(ف)

= ٥ − ١ر٩٦ × ٧٧٥ر

= ٣ر٥ درجة

، الحد الأعلى لفترة الثقة = ٥ + ١ر٩٦ × ٧٧٥ر

= ٦ر٥ درجة

∴ ح [٣ر٥ ≤ $\text{م}_1 - \text{م}_2$ ≤ ٦ر٥] = ٩٥ر٠

وهذا يبين لنا بوضوح أنه بدرجة ثقة ٩٥٪ ، تؤدي الطريقة الخاصة إلى رفع متوسط درجات الرياضة المعاصرة بمقدار يتراوح بين ثلاثة درجات ونصف إلى ستة درجات ونصف .

كذلك إذا استخدمنا درجة الثقة ٩٩٪ فسوف نجد أن ارتفاع الدرجات يتراوح بين ١ر٣ درجة إلى ٩ر٦ درجة .

(٦ــ٥) ــ تقدير تباين المجتمع من بيانات العينة :

في بعض الدراسات الإحصائية نجد أنفسنا بحاجة إلى معرفة تباين المجتمع σ^2 وكثيرا ما يكون هذا التباين مجهولا غير معروف لنا . لهذا نلجأ إلى بيانات العينة لتقدير تباين المجتمع . فمثلا عند تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة استطعنا إيجاد فترات ثقة مناسبة كما هو مبين في البند (٦ــ٢) ولكن كانت فترات الثقة تعتمد على الانحراف المعياري للمجتمع σ ، وأحيانا تكون σ مجهولة لذلك أشرنا في ملحوظة (١) بند (٦ــ٢) أننا في مثل هذه الحالة نستخدم الانحراف المعياري للعينة ع كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ ــ أي أننا نستخدم تباين العينة $ع^2$ كتقدير لتباين المجتمع σ^2 . وهذا التقدير يسمى التقدير بنقطة ــ أي أننا من بيانات العينة يمكننا الحصول على قيمة عددية وحيدة لتباين العينة $ع^2$ واعتبرناها تقديرا لتباين المجتمع . أي أن التقدير بنقطة هو التقدير بقيمة عددية وحيده وهو تقدير مقبول وجيد و يستخدم في كثير من الدراسات الإحصائية ــ ولكننا الآن نرغب في إيجاد فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ كما فعلنا في حالة متوسط المجتمع .

لكي نحصل على فترات الثقة المرغوبة نتذكر الآتي :

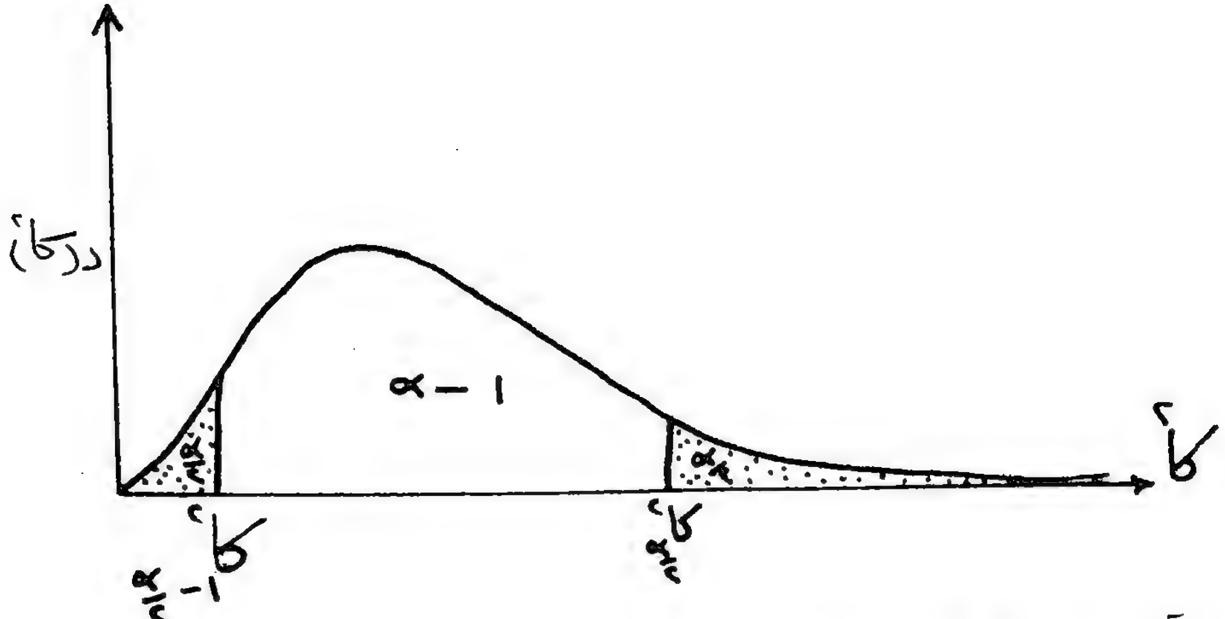
أ ــ نعلم أنه إذا سحبنا عينة حجمها $ن$ من المشاهدات المستقلة $س_1$، $س_2$، ٠٠٠ ، $س_ن$ من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن : $\frac{ن\,ع^2}{\sigma^2}$ تعتبر متغيرا عشوائيا يتبع توزيع $كا^2$ بدرجات حرية ($ن$ ــ ١) ، حيث أن :

$ع^2 = \frac{1}{ن}\sum(س-\bar{س})^2$ هى تباين العينة. وذلك دون التقيد بضرورة أن تكون العينة كبيرة.

ب ــ نعلم من معلوماتنا عن توزيع $كا^2$ كما يتضح من البند (٣ــ٩) أن :

$$ح\left[كا^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq كا^2 \leq كا^2_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

كما هو موضح في الشكل التالي :



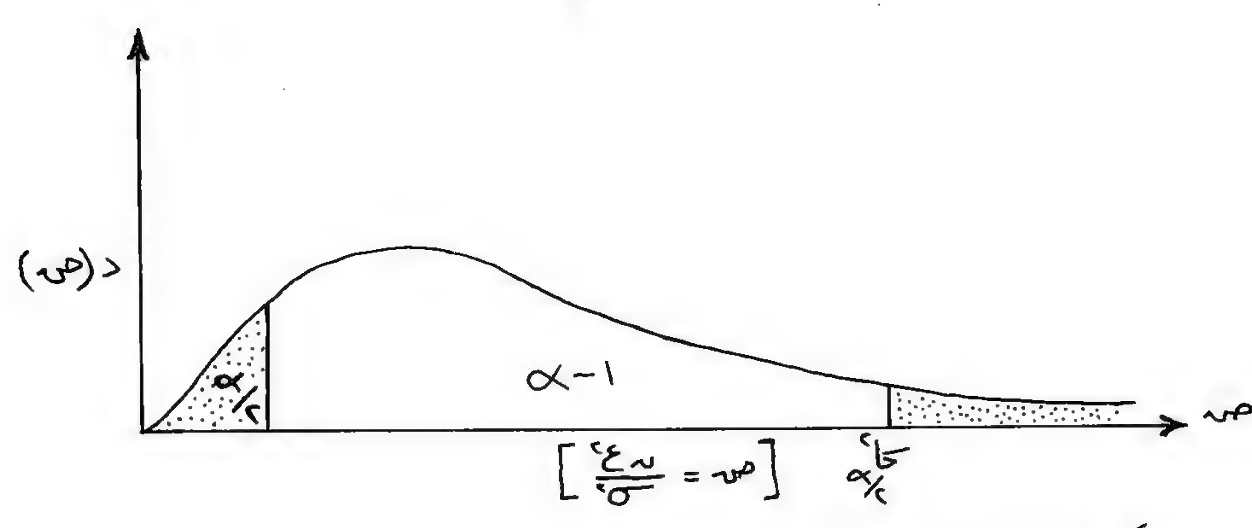
والآن نستخدم الملاحظات السابقة :

حيث أن :

$$\text{ص} = \frac{\text{ن ع}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \;\text{مج}\; (\text{س} - \overline{\text{س}})^2$$

يتبع توزيع كا² بدرجات حرية (ن ــ ١) فإن :

$$\text{ح} \left[\text{كا}^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\text{ن ع}^2}{\sigma^2} \leq \text{كا}^2_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$



ولكن الاحتمال السابق يكافىء الاحتمال :

$$\text{ح} \left[\frac{1}{\text{كا}^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma^2}{\text{ن ع}^2} \leq \frac{1}{\text{كا}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right] = 1 - \alpha$$

وهذا يكافىء :

$$\text{ح}\left[\frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\frac{\alpha}{2}}}} \leq \sigma \leq \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right] = 1-\alpha$$

علما بأن درجات الحرية = ن ــ ١ . وهذا يعطي فترة ثقة لها الحدان التاليان :

الحد الأدنى لفترة الثقة $= \dfrac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\frac{\alpha}{2}}}}$

والحد الأعلى لفترة الثقة $= \dfrac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{1-\frac{\alpha}{2}}}}$

ودرجة الثقة $= 1 - \alpha$.

وهذه تسمى فترة ثقة مركزية بمعنى أن مستوى المعنوية α منقسم إلى قسمين متساو يين $\frac{\alpha}{2}$ في الذيل الأيمن من توزيع كا^2 ، $\frac{\alpha}{2}$ في الذيل الأ يسر كما هو واضح من الرسم السابق حيث نجد أن المساحتين المظللتين متساو يتان وكل منهما تساوي $\frac{\alpha}{2}$.

فمثلا إذا أردنا استخدام درجة الثقة ١ ــ α = ٩٥٪ سيكون مجموع المساحتين المظللتين في الرسم السابق ٥٪ وعلى هذا يمكن تحديد فترة الثقة باستخدام $\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٠٢٥}}$ ، $\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٩٧٥}}$ فتكون فترة الثقة هى :

$$\text{ح}\left[\frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٠٢٥}}}} \leq \sigma \leq \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٩٧٥}}}}\right] = \text{٠٫٩٥}$$

وكذلك إذا استخدمنا درجة ثقة ٩٩٪ فإنا نحدد فترة الثقة باستخدام $\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٠٠٥}}$ ، $\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٩٩٥}}$ وتكون فترة الثقة هى :

$$\text{ح}\left[\frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٠٠٥}}}} \leq \sigma \leq \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{\text{٠٫٩٩٥}}}}\right] = \text{٠٫٩٩}$$

مثال (١٣) : سحبت عينة حجمها ١٦ طالبا من طلبة إحدى المدارس وقيست أوزانهم فوجد أن الانحراف المعياري لأوزان الطلاب في العينة ٢ر٤ كيلوجرام. أوجد فترة ثقة للانحراف المعياري لأوزان الطلاب في المدرسة كلها :

أولا : باستخدام درجة ثقة ٩٥٪

ثانيا: باستخدام درجة ثقة ٩٩٪

الحل

عند درجة الثقة ٩٥٪ ستحدد فترة الثقة من الاحتمال الآتي :

$$\text{ح}\left[\frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{0.025}}} \le \sigma \le \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{0.975}}}\right] = 0.95$$

وبما أن حجم العينة $\text{ن} = 16$

إذن درجات الحرية $\text{م} = 15$

و يكون :

الحد الأدنى لفترة الثقة $= \dfrac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{0.025}}}$

والحد الأعلى لفتة الثقة $= \dfrac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{0.975}}}$

لمعرفة قيمة $\text{كا}^{2}_{0.025}$ نبحث في جدول توزيع كا^{2} عند درجات الحرية م =١٥

والاحتمال α =٠٢٥ر٠ أي أنها عند تقاطع الصف م =١٥ مع العمود α =٠٢٥ر٠

وسنجد أن $\text{كا}^{2}_{0.025}$ =٢٧ر٤٨٨٤

و بالمثل سنجد $\text{كا}^{2}_{0.975}$ عند تقاطع الصف م = ١٥ مع العمود α =٩٧٥ر٠ ونحصل على $\text{كا}^{2}_{0.975}$ =٦ر٢٦٢١٤

و بهذا تكون فترة الثقة للانحراف المعياري σ هى:

$$\text{الحد الأدنى} = \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{2}_{0.025}}} = \frac{2.4 \times \sqrt{16}}{\sqrt{27.4884}} = \frac{9.6}{5.243} = 1.83$$

$$\text{والحد الأعلى} = \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{٢}_{٠ر٩٧٥}}} = \frac{٢ر٤ \times \sqrt{١٦}}{\sqrt{٦ر٢٦٢١٤}} = \frac{٩ر٦}{٢ر٥} = ٣ر٨٤$$

وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

و بهذا يمكن القول أن الانحراف المعياري لأوزا طلبة المدرسة جميعهم ينحصر بين ١ر٨٣ ، ٣ر٨٤ كيلوجرام وأن درجة ثقتنا في هذا الكلام هو ٩٥٪

ثانيا: بأسلوب مماثل لما اتبعناه في أولا ولكن باستخدام درجة ثقة ٠ر٩٩ سنجد أن فترة الثقة يمكن تحديدها من الاحتمال الآتي:

$$\text{ح}\left[\frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{٢}_{٠ر٠٠٥}}} \leq \sigma \leq \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{\text{كا}^{٢}_{٠ر٩٩٥}}}\right] = ٠ر٩٩$$

ومن جدول كا² نجد أنه عند درجات الحرية م = ١٥ يكون:

$$\text{كا}^{٢}_{٠ر٠٠٥} = ٣٢ر٨٠١٣$$

$$\text{كا}^{٢}_{٠ر٩٩٥} = ٤ر٦٠٠٩٤$$

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{٣٢ر٨٠١٣}} = \frac{٢ر٤ \times \sqrt{١٦}}{٥ر٧٢٧} = \frac{٩ر٦}{٥ر٧٢٧} = ١ر٦٧٦$$

$$\text{والحد الأعلى لفترة الثقة} = \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ن}}}{\sqrt{٤ر٦٠٠٩٤}} = \frac{٩ر٦}{٢ر١٤٤٩٨} = ٤ر٤٧٦$$

إذن عند درجة الثقة ٩٩٪ نجد أن الانحراف المعياري للمجتمع ينحصر بين ١ر٦٧٦ ، ٤ر٤٧٦ كيلوجرام.

نلاحظ أنه كلما زادت درجة الثقة كلما اتسعت فترة الثقة ــ فعندما كانت درجة الثقة ٩٥٪ كانت فترة الثقة (١ر٨٣ ــ ٣ر٨٤) بينما أصبحت درجة الثقة ٩٩٪ أصبحت فترة الثقة (١ر٦٧٦ ، ٤ر٤٧٦) و بهذا تكون الزيادة في الثقة على حساب دقة الفترة نفسها.

الباب السابع

اختبار الفروض الإحصائية

اختبار الفروض الإحصائية

(٧ــ١) ــ مقدمة :

تعتبر نظرية التقدير واختبارات الفروض الإحصائية من أهم الطرق الإحصائية بصفة عامة. وقد ناقشنا في الباب السادس طريقة تقدير بعض معالم المجتمع مثل متوسط المجتمع ــ الانحراف المعياري للمجتمع ــ ونسبة ظاهرة معينة في المجتمع ــ أما هذا الباب فسيخصص للتعرف على مبادىء اختبارات الفروض الإحصائية دون الدخول في التفاصيل الأساسية وسنتكلم عن الفرض الإحصائي وعن الاختبار الإحصائي وكيفية إجرائه. ولتوضيح هذه المفاهيم نأخذ مثالا من الواقع.

كما نعلم في كثير من الحالات العملية وفي مجالات العمل المختلفة قد يجد الإنسان نفسه في موقف معين يتطلب منه اتخاذ قرار بناء على معلومات معينة وطبيعي أن يتخذ هذا القرار بشيء من الحكمة و بأقل قدر ممكن من المخاطر إذ أن هذا القرار قد يترتب عليه نفقات قد تكون طائلة و بالتالي لابد أن يكون لها ما يبررها. فمثلا نفرض أن مصنعا لإنتاج بعض أنواع المعلبات يستخدم نوعا معينا من الآلات لتعبئة الإنتاج النهائي في علب معدنية وكان معلوما لدى مدير المصنع أن متوسط عدد الوحدات التي تعبئها الآلة من هذا النوع هو ١٥٠ علبة في الساعة ونفرض أنه ظهر في الأسواق نوع جديد من آلات التعبئة وادعى منتج هذا النوع من الآلات أن الآلة تقوم في المتوسط بتعبئة عدد أكبر من العلب في الساعة عما تقوم به الآلة من النوع الأول. في مثل هذه الحالات قد يرغب مدير المصنع استبدال الآلات الموجودة في مصنعه بآلات من النوع الجديد ولكن هذا القرار سوف يترتب عليه تحميل المصنع نفقات كبيرة تتمثل في الاستغناء عن الآلات الموجودة وشراء آلات جديدة قد تكون بمبالغ طائلة بالإضافة إلى تعطيل المصنع فترة لتركيب الآلات الجديدة. لهذا لابد لمدير المصنع أولا أن يتأكد من أن متوسط الإنتاج للآلات من النوع الجديد أعلى فعلا من النوع القديم وليس أمامه إلا طريقة واحدة هي أن يجرب آلة من النوع الجديد وذلك بتشغيلها عدة ساعات (كعينة) ويحصر عدد الوحدات المنتجة في كل ساعة وكذلك متوسط عدد الوحدات في كل العينة ــ نفرض أنه وجد أن متوسط عدد الوحدات المنتجة هو ١٧٠ علبة في الساعة ــ فهل معنى ذلك أن النوع الجديد يعطي وحدات أكبر من النوع الأول أم أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة.

إذا استطاع مدير المصنع أن يعرف بطريقة ما و بشيء من الثقة أن هذا الفرق لا يمكن أن يكون راجعا إلى مجرد الصدفة فإن معنى ذلك أن الآلة من النوع الجديد تقوم فعلا بتعليب عدد أكبر من الوحدات في المتوسط عما تقوم به الآلة من النوع الأول و بالتالي يكون من الحكمة اتخاذ قرار بتغيير الآلات. أما إذا ظهر لنا بأسلوب ما أن هذا الفرق راجع إلى مجرد الصدفة وحدها وأن النوع الجديد من الآلات لا يعطي وحدات أكبر من النوع الأول فلا داعي إذن لاستبدال الآلات.

من المثال السابق يمكننا التعرف على معنى كل من المفاهيم التالية :

أ ـــ الفرض الإحصائي .
ب ـــ اختبار الفرض الإحصائي .
جـــ درجة الثقة .
جـــ مستوى المعنوية .

إن ادعاء منتج النوع الجديد من الآلات بأن متوسط عدد الوحدات التي تعبئها الآلة من هذا النوع أكبر من متوسط عدد الوحدات للنوع الأول ـــ هذا الادعاء يسمى فرضا احصائيا لأنه يفترض أن متوسط عدد الوحدات للآلة من النوع الجديد أكبر من ١٥٠ وحدة وهو متوسط العدد للآلة من النوع الأول كما أن الأسلوب أو الطريقة التي بواسطتها يستطيع مدير المصنع الحكم على صحة هذا الفرض تسمى بالاختبار الإحصائي للفرض .

إن الاختبار الإحصائي لفرض ماهـــو مجموعة من القواعد تمكننا من قبول أو رفض هذا الفرض . ومقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى درجة الثقة ـــ كما أن مقدار عدم الثقة يسمى مستوى المعنوية .

إن المواقف التي نكون فيها بصدد اتخاذ قرار ما هى مواقف كثيرة ومتعددة وما المثال السابق إلا واحد من هذه المواقف ـــ فمثلا قد يكون من المطلوب بناء على بيانات عينة أن نقرر ما إذا كان دواء جديد له تأثير فعال ومفيد في علاج مرض معين أو إذا كانت طريقة معينة لتدريب العمال تؤدي إلى رفع كفاءتهم الإنتاجية أو مدى تأثير السمنة على حياة الإنسان أو مدى تأثير التدخين في زيادة احتمال الإصابة بمرض السرطان أو غير ذلك . ولكن في كل حالة يكون مطلوب منا تنفيذ ثلاث خطوات هى :

(أ) صياغة الفرض الإحصائي .
(ب) إجراء الاختبار الإحصائي بأسلوب معين .
(جـ) اتخاذ القرار إما بقبول أو رفض الفرض وذلك بدرجة ثقة معينة .

وسنتكلم بصورة سريعة عن كل خطوة من الخطوات الثلاث السابقة لإلقاء بعض الضوء عليها .

(أ) صياغة الفرض الإحصائي :

دائما نصيغ الفرض الإحصائي بصورة معاكسة تماما للحالة التي نريد اختبارها ـــ فمثلا في حالة التفرقة بين نوعين من الآلات تستخدم في الإنتاج وكان هناك ادعاء أن متوسط إنتاج الآلة من النوع الثاني أكبر من متوسط إنتاج الآلة من النوع الأول و يراد إجراء اختبار إحصائي لهذا الادعاء فإننا نفترض دائما حسن النية ونبدأ بوضع الفرض الإحصائي الآتي :

تمارين

١ ــ الجدول التالي يوضح توزيع عينة من الأسر في إحدى القرى حسب الإنفاق اليومي بالريال

فئات الانفاق بالريال	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٣٠٠-	٣٥٠-	٤٠٠-	المجموع
عدد الأسر	١٠	١٣	١٥	٢٥	١٧	١٢	٨	١٠٠

والمطلوب تقدير متوسط الإنفاق اليومي في هذه القرية وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪ في الحالتين الآتيتين:

أولا : إذا كانت هذه القرية كبيرة

ثانيا: إذا كانت هذه القرية صغيرة وعدد الأسر فيها ٣٠٠ أسرة.

٢ ــ حل التمرين السابق مع اعتبار درجة ثقة ٩٩٪.

٣ ــ عينة عشوائية مكونة من ٦٤ صماما أليكترونيا عاشت في المتوسط ٨٥٠ ساعة مع انحراف معياري ٤٨ ساعة. أوجد فترة ثقة باحتمال ٩٥٪ لمتوسط أعمار جميع الصمامات.

٤ ــ مصنع ينتج قضبانا حديدية، أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٥٠ قضيب من إنتاج هذا المصنع وقيست أطوالها فكانت كما يأتي:

الطول بالمليمتر	٩٨٠-	٩٩٠-	١٠٠٠-	١٠١٠-	١٠٢٠-	١٠٣٠-	المجموع
عدد القضبان	١٩	٣٢	٥١	٢٥	١٤	٩	١٥٠

ما الذي تستنتجه عن الوسط الحسابي لطول القضيب في الإنتاج الكلي لهذا المصنع؟

٥ ــ تحتفظ شركة ببيانات عن الإنتاج اليومي لكل من عمالها وتضع هذه البيانات في اعتبارها عند النظر في زيادة أجور هؤلاء العمال. وعند النظر في حالة أحد العمال أعطيت البيانات التالية عن إنتاجه في التسعين يوما الأخيرة على اعتبار أن هذه البيانات عينة عشوائية من إنتاجه العام.

ما الذي تستنتجه من هذه البيانات عن الوسط الحسابي لإنتاج هذا العامل؟

عدد الوحدات المنتجة فى اليوم	١٧٠-	١٨٠-	١٩٠-	٢٠٠-	٢١٠-	٢٢٠-	المجموع
عدد الايام	٩	١٦	٢٥	٢٠	١٢	٨	٩٠

٦ ـ الجدول التالي يبين توزيع عينة من ١٣٠٠ من عمال المحال التجارية بحسب أعمارهم .

فئات الأعمار بالسنة	١٠ ـ	٢٠ ـ	٣٠ ـ	٤٠ ـ	٥٠ ـ	٦٠ الى اقل من ٧٠	المجموع
عدد العمال	٢٨٨	٣٩٧	٢٩٩	١٨٢	١٠٢	٣٢	١٣٠٠

باستخدام بيانات الجدول السابق استنتج :

أ ـ نسبة عمال التجارة الذين تقل أعمارهم عن ٣٠ سنة في المجتمع كله

ب ـ نسبة عمال التجارة الذين تبلغ أعمارهم ٥٠ سنة فأكثر في المجتمع كله .

جـ ـ عدد عمال التجارة الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٠ ، ٤٠ سنة .

وذلك إذا علمت أن عدد عمال التجارة في المجتمع كله هو ١٥٠ ألف عامل .

٧ ـ إذا عرفنا الأسر الصغيرة بأنها الأسر المكونة من ٣ أفراد أو أقل والأسر المتوسطة بأنها الأسر التي يتراوح عدد أفرادها بين ٤ ، ٦ أفراد والأسر الكبيرة بأنها تلك التي يزيد عدد أفرادها عن ٦ أفراد . فاستعمل بيانات الجدول التالي في إيجاد نسبة الأسر من كل من هذه الأحجام الثلاثة في المجتمع الذي أخذت منه العينة .

« الجدول التالي يبين توزيع ٥٠٠ أسرة بحسب عدد الأفراد »

عدد الافراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	١٨	٣٩	٧١	١٠٢	١٤٧	٨٦	٣٠	٧	٥٠٠

٨ ـ مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية سحبت منه عينة مكونة من عشرة مصابيح ووجد أن الانحراف المعياري لعمر المصباح في العينة ١٢٠ ساعة ـ قدر بفترة ثقة مناسبة الانحراف المعياري لعمر المصباح في إنتاج المصنع وذلك :

أ ـ بدرجة ثقة ٩٥٪

ب ـ بدرجة ثقة ٩٩٪

٩ ـ حل التمرين السابق إذا كان حجم العينة ٢٥ مصباحا والانحراف المعياري ١٢٠ ساعة كما هو.

«نفترض عدم وجود اختلاف بين متوسطي الإنتاج للنوعين من الآلات» و يسمى هذا الفرض بفرض العدم ونرمز له بالرمز ف. ثم نجري الاختبار وتكون نتيجة الاختبار إما قبول ف أو رفضه فإذا كان القرار قبول ف. كان معنى ذلك أنه لا يوجد اختلاف بين متوسطي الإنتاج في النوعين من الآلات وأن الاختلاف الموجود لدينا هو اختلاف ظاهري نتيجة للصدفة وحدها ودائما في الواقع يقابل فرض العدم ف. فرض معاكس له يسمى الفرض البديل و يرمز له بالرمز ف ــ فإذا كان فرض العدم هو:

«عدم وجود اختلاف» ــ يكون الفرض البديل ف. هو:
«وجود اختلاف حقيقي وليس ظاهري» . وقبول فرض العدم ف معناه الفرض البديل ف ــ ورفض فرض العدم يكون معناه أنه لا يوجد لدينا من المبررات ما يكفي لرفض الفرض البديل ف وفي هذه الحالة لا يكون في وسعنا إلا قبوله .

(ب) إجراء الاختبار الإحصائي :

دائما نجري الاختبار لرفض أو قبول فرض معين نبدأ به ونسميه فرض العدم ف ــ ثم نسحب عينة عشوائية ومن بيانات العينة نحسب إحصاء معينا مثل المتوسط (سَ) أو النسبة (ل) أو الانحراف المعياري (ع) أو أي دالة معينة في أحد هذه الإحصاءات أو غير ذلك .

والخطوات التالية تلقي مزيدا من الضوء على كيفية إجراء الاختبار الإحصائي :

١ ــ نفرض أن لدينا مجتمعا ما يتبع توزيعا احتماليا معينا وأن هذا التوزيع الاحتمالي يعتمد على بعض المعالم (مثل متوسط التوزيع μ أو الانحراف المعياري σ أو نسبة ظاهرة معينة في هذا المجتمع P).

٢ ــ نفرض أن المطلوب اختبار فرض عدم معين ف حول أحد هذه المعالم أو أي دالة فيها .

٣ ــ نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمه التي يدور حولها الفرض أو دالة في هذا التقدير وسبق أن أوضحنا في بند (٦ــ١) أن الإحصاء ما هو إلا متغير عشوائي يتبع توزيعا معينا .

٤ ــ باعتبار أن فرض العدم صحيح نبحث عن التوزيع الاحتمالي لهذا الإحصاء ونقوم برسم شكل التوزيع الاحتمالي للإحصاء باعتبار أن المحور الأفقي هو قيم الإحصاء والمحور الرأسي يمثل دالة الاحتمال علما بأن جميع الإحصاءات التي سوف نتناولها لها توزيعات احتمالية سبق دراستها .

٥ ــ بناء على درجة الثقة المطلوبة يمكن تقسيم محور المتغير العشوائي (محور الإحصاء) إلى منطقتين إحداهما تسمى منطقة القبول والأخرى تسمى منطقة الرفض. حيث أن المساحة أسفل منحنى التوزيع وأعلى منطقة القبول تساوي درجة الثقة ، بينما المساحة أسفل منحنى التوزيع ، وأعلى منطقة الرفض تسمى مستوى المعنوية .

٦ ــ نسحب عينة عشوائية من المجتمع ومنها نحسب القيمة المشاهدة لهذا الإحصاء ونحاول رصد هذه القيمة على المحور الأفقي الذي يمثل قيم الإحصاء ــ سنجد ــ أن هذه القيمة إما أن تقع في منطقة القبول أو تقع في منطقة الرفض.

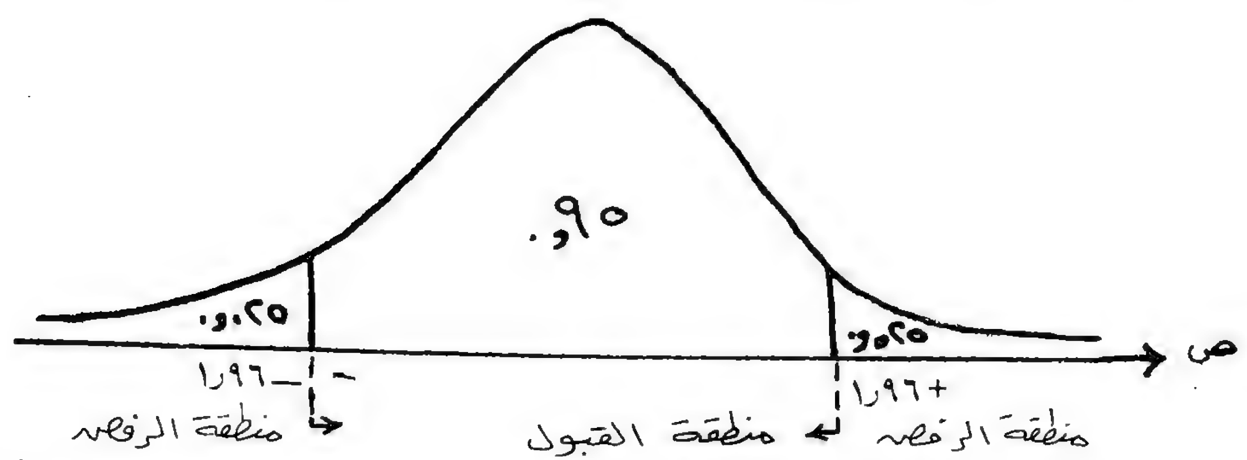
(جـ) اتخاذ القرار:

إذا وقعت القيمة المشاهدة للإحصاء والمحسوبة من بيانات العينة في منطقة القبول، فإننا نقبل فرض العدم ف$_0$ بدرجة الثقة المحددة وعلى ذلك نرفض البديل ف$_1$ ــ أما إذا وقعت القيمة المشاهدة في منطقة الرفض كان معنى ذلك أننا نرفض ف$_0$ أو بمعنى آخر ليس لدينا المبرر الكافي لرفض ف وفي هذه الحالة نقبل الفرض البديل ف$_1$.

فمثلا لو كان الإحصاء الذي نستخدمه في إجراء الاختبار هو الوسط الحسابي $\bar{س}$ وكان فرض العدم هو:

ف$_0$: توزيع المعاينة للاحصاء $\bar{س}$ هو توزيع معتاد توقعه $\mu(\bar{س})$ وانحرافه المعياري $\sigma(\bar{س})$.

فكما سبق أن أوضحنا في الباب الخامس أن المتغير ص $= \frac{\bar{س} - \mu(\bar{س})}{\sigma(\bar{س})}$ له توزيع طبيعي قياسي ويمكن رسم منحنى هذا التوزيع وتحديد درجة الثقة ٩٥٪ في الرسم كما يلي:

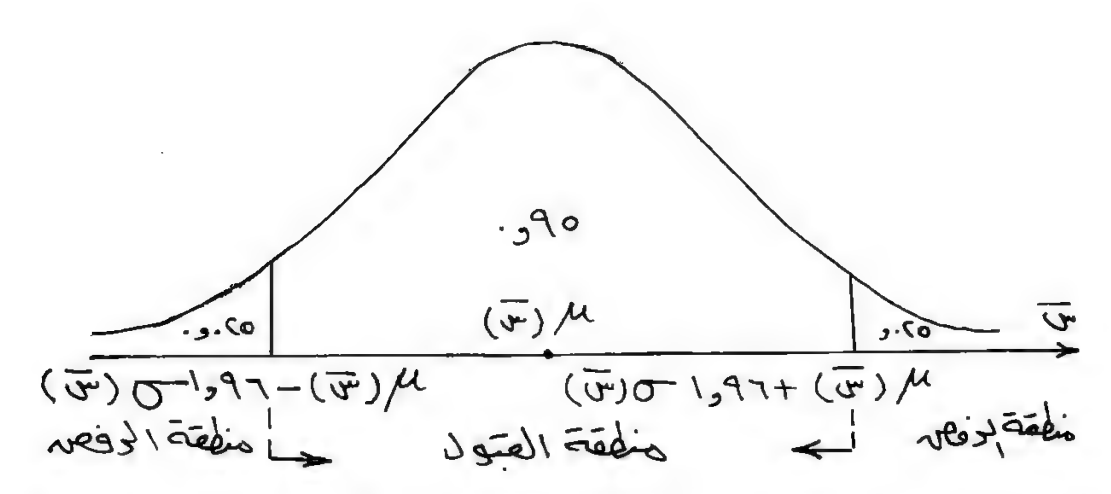


وكما يتضح من الرسم أنه إذا كان فرض العدم ف صحيحا سوف نكون واثقين بدرجة ٩٥٪ أن القيمة المشاهدة للمتغير ص والمحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول. أي أن ص لن تقل عن ــ ١٫٩٦ ولن تزيد عن + ١٫٩٦ إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمالها ٥٪. وعلى هذا لو حسبنا قيمة ص من بيانات العينة المسحوبة ووجدنا أن قيمة ص تقع خارج المنطقة من ــ ١٫٩٦ إلى + ١٫٩٦ فإننا نستبعد أن يكون فرض العدم صحيحا ونحصل على مثل هذه النتيجة في ٥٪ من الحالات وبناء على ذلك نرفض ف ونقول أن قيمة ص تختلف معنويا عما هو متوقع بناء على صحة الفرض ف وأن مستوى المعنوية ٥٪. أما إذا وقعت قيمة ص في الفترة (ــ ١٫٩٦ ، + ١٫٩٦) نقول أن قيمة ص المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع وبالتالي فإننا نقبل ف$_0$ وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

من الواضح أنه يمكننا استخدام درجة ثقة ٩٩٪ أو أي درجة ثقة نرغب فيها . كذلك بناء على صياغة فرض العدم يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل آخر فنحن نعلم أن فرض العدم ف. متعلق بالإحصاء $\bar{س}$ كما يلي :

ف. : توزيع المعاينة للإحصاء $\bar{س}$ هو توزيع طبيعي توقعه μ ($\bar{س}$) وانحرافه المعياري σ ($\bar{س}$) .

وعلى هذا يمكن رسم توزيع المتغير $\bar{س}$ مباشرة حسب معلوماتنا من فرض العدم عند درجة الثقة ٩٥٪ سيكون الرسم كما في الشكل التالي :



فإذا كان فرض العدم صحيحا سنكون واثقين بدرجة ٩٥٪ أن القيمة المشاهدة للمتغير $\bar{س}$ المحسوبة من بيانات العينة ستقع في منطقة القبول . أي أن $\bar{س}$ لن تقع خارج المنطقة من μ ($\bar{س}$) ـ ١ر٩٦ σ ($\bar{س}$) إلى μ ($\bar{س}$)+١ر٩٦ σ ($\bar{س}$) إلا في حالات نادرة لا يتعدى احتمال حدوثها ٥٪ . لهذا فإننا نحسب المتوسط $\bar{س}$ من بيانات العينة فإذا وقعت القيمة المحسوبة للمتغير $\bar{س}$ في منطقة القبول نقول أن $\bar{س}$ المشاهدة لا تختلف عما هو متوقع بناء على افتراض صحة ف. لهذا فإننا نقبل ف. بدرجة ثقة ٩٥٪ أي أننا نرفض أي فرض مرادف ف، يختلف عن ف . والعكس صحيح إذا وقعت $\bar{س}$ المشاهدة في منطقة الرفض .

ومما هو جدير بالذكر أن الاختبار الموضح أعلاه سواء باستخدام المتغير ص أو المتغير $\bar{س}$ يعتمد على وضع منطقة الرفض على جانبي منطقة القبول أي في ذيلي التوزيع ، لهذا فإن الاختبار من هذا النوع يسمى الاختبار ذو الذيلين ولكن يوجد اختبار ذو ذيل واحد وذلك إذا جعلنا كل مستوى المعنوية α في أحد الذيلين أي جعلنا منطقة الرفض في ذيل واحد وليس في الذيلين .

(٧ــ٢) ــ اختبار فرض معين حول توقع المجتمع :

إذا كان لدينا مجتمع ما يتبع توزيعا احتماليا معينا ــ وأخذنا من هذا المجتمع عينة

عشوائية كبيرة حجمها $ن$ وحسبنا وسطها الحسابي $\bar{س}$ وانحرافها المعياري ع فيمكننا أن نختبر أي فرض إحصائي حول توقع المجتمع μ وذلك عن طريق حساب المقدار:

$$ص = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

وذلك باتباع الخطوات الموضحة في البند السابق (٧ـ١) ـ وذلك بتحديد توزيع المتغير ص بناء على صحة الفرض المراد اختباره وتحديد منطقتي الرفض والقبول لمستوى المعنوية المطلوب ـ فإذا وقعت قيمة ص المشاهدة في منطقة الرفض نرفض الفرض أما إذا وقعت في منطقة القبول فإننا نقبل الفرض والمثال التالي يوضح لنا ذلك.

مثال (١) : شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية يدعى صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط ١٥ كيلو جرام بانحراف معياري نصف كيلو جرام.

ولاختبار صحة ادعاء الصانع أخذت عينة عشوائية مكونة من ٥٠ خيطا وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة ١٤٫٨ كيلوجرام. فهل يمكننا تأييد ادعاء المدير. (استخدم درجة ثقة ٩٩٪).

الحل

يمكن صياغة الحل في الخطوات الآتية:

أ ـ صياغة الفرض الإحصائي

$$ف_{.} : \mu = ١٥ \text{ كجم}$$

وف. كما يتضح هو فرض العدم ـ أي افتراض عدم وجود اختلاف بين المتوسط الحقيقي و بين المتوسط الذي يدعيه الصانع.

وفي هذه الحالة يمكن افتراض أن الفرض البديل هو:

$$ف_{١} : \mu \neq ١٥ \text{ كجم} .$$

ب ـ إجراء الاختبار الإحصائي.

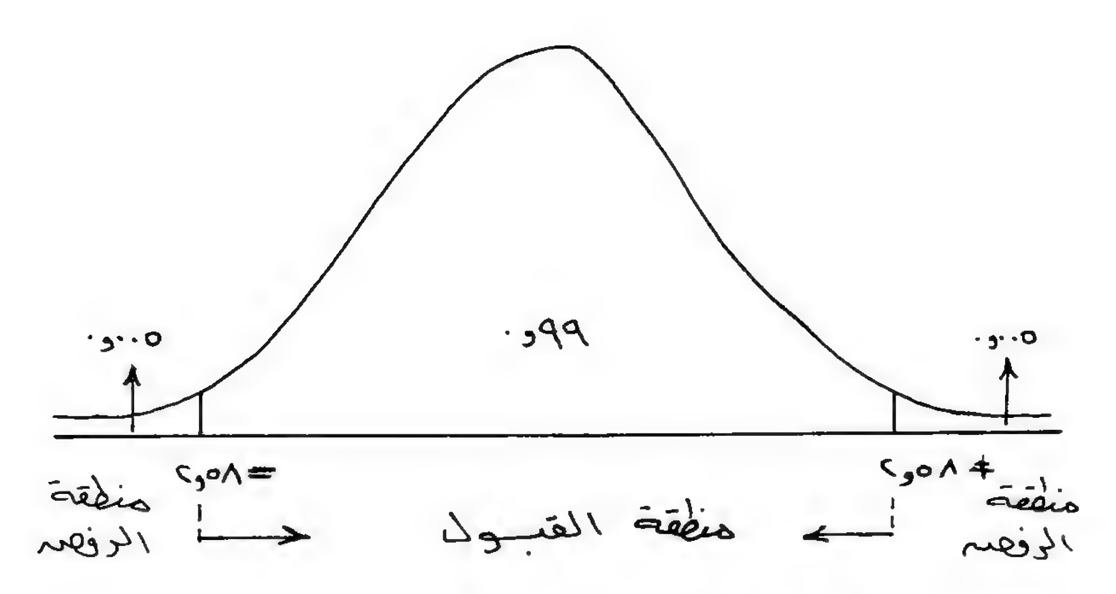
١ ـ لهذا نبحث عن إحصاء معين يعتبر أحد تقديرات المعلمة μ ـ هذا الإحصاء هو $\bar{س}$. وكما

نعلم أن:

$$ص = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$ تعتبر دالة في هذا الإحصاء

٢ ــ باعتبار أن فرض العدم (فـ) صحيح يكون ص له توزيع معتاد قياسي.

٣ ــ عند درجة الثقة ٩٩٪ و باستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع المعتاد القياسي يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض كما في الشكل التالي:



٤ ــ نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة نجد أنها:

$$ص = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$ حيث $\bar{س}$ = ١٤٫٨ كجم

، σ = ٠٫٥ كجم ، ن = ٥٠

$$\therefore ص = \frac{١٤٫٨ - ١٥}{٠٫٥ / \sqrt{٥٠}} = -٢٫٨٣$$

ج ــ اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة ص المشاهدة أقل من ــ ٢٫٥٨ (وهى أقل قيمة في منطقة القبول) أي أن ص المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو:

« رفض ف$_0$ » .

ونستنتج من ذلك أن متوسط قوة تحمل الخيط μ لا تساوي ١٥ كجم حيث أن قيمة ص المشاهدة تقع في الجانب الأ يسر من منطقة الرفض ــ بل أكثر من ذلك يمكننا استنتاج أن μ أقل من ١٥ كجم .

في بعض الأحيان يكون من المطلوب اختبار الفرض القائل أن متوسط المجتمع μ يساوي قيمة معينة μ_0 مثلا وذلك في مقابل الفرض البديل ف$_1$: $\mu > \mu_0$ أو $\mu < \mu_0$ وفي هذه الحالة يمكن تكوين اختبار إحصائي يسمى اختبار ذو ذيل واحد ــ وذلك بوضع منطقة الرفض في ذيل واحد من التوزيع الاحتمالي أما الذيل الأيمن أو الذيل الأ يسر.

مثال (٢) : في عينة عشوائية مكونة من تسجيل ١٠٠ حالة وفاة في قرية معينة تبين أن متوسط العمر في العينة ٦٧٫٥ عاما والانحراف المعياري ٨ أعوام . فهل هذا يوضح أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من ٦٥ عاما ؟

استخدم مستوى معنو ية ٥٪ .

الحل

نفرض أن μ متوسط العمر في هذه القرية .

أ ــ صياغة الفرض الإحصائي .

فرض العدم ف$_0$: μ = ٦٥ عاما .

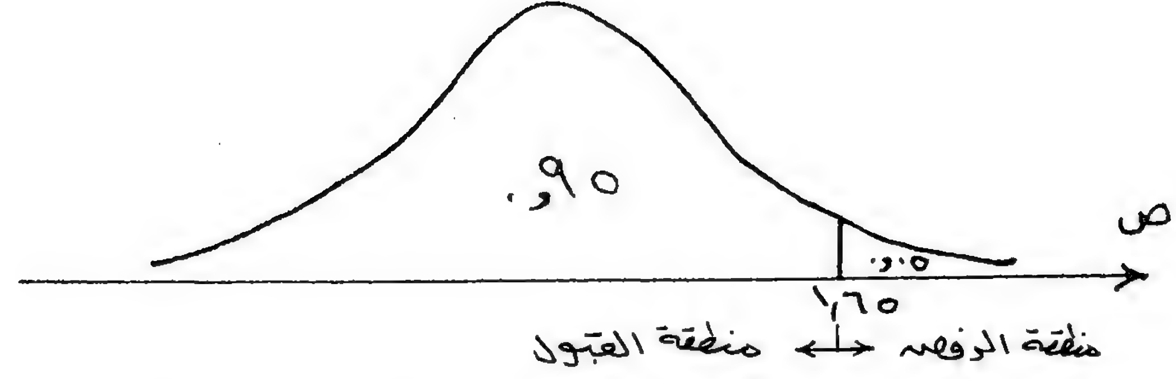
الفرض البديل ف$_1$: $\mu >$ ٦٥ عاما .

ب ــ إجراء الاختبار الإحصائي .

١ ــ نعلم أن ص = $\dfrac{\bar{س} - \mu}{\sigma / \sqrt{ن}}$

لها توزيع طبيعي قياسي

٢ ــ عند درجة الثقة ٩٥٪ و باستخدام معلوماتنا السابقة عن التوزيع الطبيعي القياسي يمكن تحديد منطقة القبول أو الرفض كما في الشكل التالي بحيث تكون منطقة الرفض هى الذيل الأيمن للتوزيع .



أي أن منطقة الرفض هى المنطقة التي فيها ص > ١٫٦٥

٣ ــ من بيانات العينة نجد أن:

$\bar{س}$ = ٦٧٫٥ عاما

σ ≃ ع = ٨ أعوام

ن = ١٠٠ مفردة

إذن قيمة ص المشاهدة = $\frac{67.5 - 65}{8 / \sqrt{100}} = \frac{2.5}{0.8}$

= ٣٫١٢٥

جـ ــ اتخاذ القرار:

نجد أن قيمة ص المشاهدة أكبر من ١٫٦٥ لهذا فإن ص المشاهدة تقع في منطقة الرفض لهذا فإن القرار هو رفض ف.

ونستنتج من ذلك أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من ٦٥ عاما أي أن $ف_١$ هو الفرض الصحيح المقبول.

ويمكن من المثال السابق ملاحظة أنه لاختبار أن μ أقل من قيمة معينة يمكن عمل نفس الاختبار ولكن مع وضع منطقة الرفض في الذيل الأيسر. وذلك لأن تحديد منطقة الرفض يتوقف على الفرض البديل.

(٧ــ٣) ــ اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع P :

في كثير من الحالات العملية نجد أنفسنا محتاجين لاختبار فرض معين حول نسبة معينة في مجتمع ما.

فمثلا قد يحتاج السياسي لمعرفة نسبة الذين سوف ينتخبوه في الانتخاب القادم P . كذلك قد تحتاج الشركات الصناعية لمعرفة نسبة التآلف P في بضاعتها بسبب الشحن مثلا وغير ذلك الكثير من الحالات العملية.

في مثل هذه الحالات يكون الاهتمام منصبا على النسبة P للظاهرة محل الدراسة.

وقد سبق لنا في الباب السادس في البند (٦ــ٣) أن تكلمنا عن إنشاء فترة الثقة للنسبة P. ولكننا الآن سنتناول بالدراسة شكلة اختبار الفرض الإحصائي القائل بأن النسبة P تساوي قيمة معينة. أي أننا سوف نختبر فرض العدم ف. : القائل أن $P = P_.$ مثلا ضد الفرض البديل ف١ القائل أن: $P < P_.$ أو $P > P_.$ أو $P \neq P_.$.

عند إنشاء فترة ثقة للنسبة P في البند (٦ــ٣) ذكرنا أنه عندما تكون العينة كبيرة تكون النسبة ل في العينة لها تقريبا توزيع معتاد متوسطه $\mu(ل) = P$

وانحرافه المعياري $\sigma(ل) = \sqrt{\frac{P(1-P)}{ن}}$

وعلى هذا يمكن تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي والفرض البديل.

نعلم أن

$$ص = \frac{ل - P_.}{\sqrt{P_.(1-P_.)/ن}}$$

وذلك باعتبار أن فرض العدم ف. صحيح

وبناء على ما تقدم وباستخدام مستوى المعنوية α يمكن رسم منحنى التوزيع الطبيعي القياسي وتحديد منطقتي الرفض والقبول عليه وإجراء الاختبار كما في حالة الوسط الحسابي تماما. ولا نجد داعيا هنا لإعادة ذكر الخطوات لأن ذلك يكون تكرارا مملا لا مبرر له وإنما نكتفي بالمثال التالي:

مثال (٣) : يدعى مدير شركة لإنتاج نوع معين من السجائر أن ٢٠٪ من المدخنين يفضلون هذا النوع من السجائر. ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة عشوائية تتكون من ٤٠٠ مدخن وسئل كل منهم عن نوع السجائر الذي يفضله فإذا أجاب ١٠٠ فرد بأنهم يفضلون ذلك النوع المراد اختباره فماذا نستنتج من ذلك؟

استخدم مستوى معنوية ١٪.

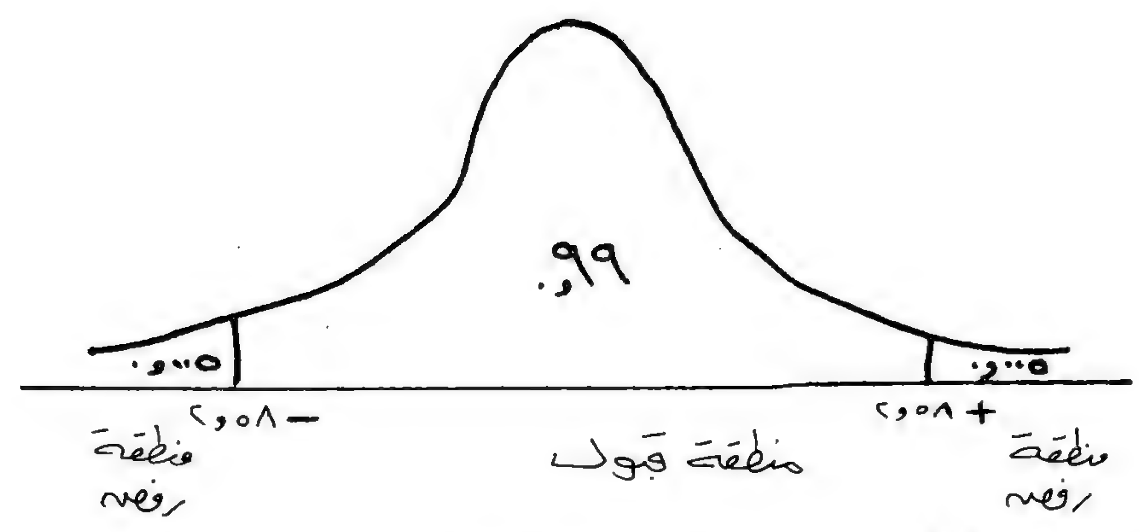
ملحوظة (١) : في حل هذا المثال لا نلجأ إلى الإسراف في شرح خطوات الحل كما في المثال السابق لأن المقصود بالإسهاب في المثالين السابقين هو توضيح طريقة وخطوات الاختبار أما الآن فيكفينا ذكر الحل في خطوات مختصرة.

الحل

١ ــ ف. = P = ٠ر٢٠ ،، ف١ $P \neq$ ٠ر٢٠

٢ ـ $ص = \frac{ل - P}{\sqrt{P(1 - P) / ن}}$ لها توزيع طبيعي قياسي .

٣ـ عند مستوى المعنوية ١٪ أي عند درجة الثقة ٩٩٪ يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض من منحني التوزيع الطبيعي القياسي كما في الشكل التالي :



٤ ـ نحسب قيمة ص المشاهدة من بيانات العينة ـ حيث

$ل = \frac{١٠٠}{٤٠٠} = ٠٫٢٥$ ، $ن = ٤٠٠$

$$\therefore \text{ص المشاهدة} = \frac{٠٫٢٥ - ٠٫٢٠}{\sqrt{٠٫٢٠(١ - ٠٫٢٠) / ٤٠٠}} = \frac{٠٫٠٥}{٠٫٠٢} = ٢٫٥$$

٥ ـ نجد أن قيمة ص المشاهدة تقع داخل منطقة القبول لذلك نقبل فرض العدم ونستنتج أن ادعاء المدير صحيح .

ويمكن باستخدام نفس الأساليب السابقة في البند (٧ـ٢) اختبار الفرض القائل بان P أكبر من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأيمن من توزيع ص أو اختبار الفرض القائل بان P أقل من قيمة معينة وذلك بوضع منطقة الرفض في الذيل الأ يسر من توزيع ص .

ملاحظة (٢) : في نهاية البند (٨ـ١) ذكرنا أنه بناء على الأسلوب الذي يصاغ به فرض العدم في يمكن تحديد منطقتي القبول والرفض على شكل غير الشكل السابق وذلك برسم التوزيع الاحتمالي للإحصاء المراد اختبار المعلمه التي تناظره في المجتمع وتحديد منطقتي القبول والرفض على المحور الذي يمثل قيم الإحصاء مباشرة دون اللجوء إلى التحو يل إلى المتغير الطبيعي القياسي ص . وسوف نتبع هذه الطريقة في البند التالي (٧ـ٤) كوسيلة إلى التعرف على هذا الأسلوب .

(٧ــ٤) ــ اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين :

أحيانا يكون لدينا عينتان و يكون الهدف هو مقارنة متوسطيهما، فقد نجد اختلافا بين المتوسطين، كأن نجد متوسط العينة الأولى أكبر من متوسط العينة الثانية ــ فهل يكون معنى ذلك أن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع متوسطه أكبر من متوسط المجتمع المسحوب منه العينة الثانية ــ أم أن هذا الاختلاف بين متوسطيهما راجع إلى الصدفة البحتة وأن العينتان مسحوبتين من مجتمعين لهما نفس المتوسط.

فمثلا إذا كان لدينا آلتان لإنتاج سلعة معينة في أحد المصانع ثم سجلنا بيانات عن إنتاج الآلة الأولى لمدة ٦٠ يوما (كعينة من العمر الإنتاجي لهذه الآلة) فوجدنا متوسط الإنتاج اليومي لهذه الآلة ٢٥٠ وحدة ثم سجلنا بيانات عن آلة من نوع آخر لإنتاج نفس السلعة وذلك لمدة ٧٠ يوما (كعينة أخرى من العمر الإنتاجي للآلة الثانية) فوجدنا أن متوسط الإنتاج اليومي لها ٣٠٠ وحدة. و يهمنا أن نعرف سبب هذا الفرق. فإذا كان سبب هذا الفرق هو أن الآلة الثانية أكفأ من الأولى فإن إدارة المصنع قد تتخذ قرارا بوقف استخدام الآلة الأولى واستبدالها بآلة من النوع الثاني. أما إذا كان هذا الفرق راجعا إلى مجرد الصدفة البحتة فسترى إدارة المصنع أنه لا داعي لاستبدال الآلة. هذا التحليل يعتبر اختبارا لمقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن إيضاح هذا الاختبار بصورة عامة وكيفية إجرائه في الخطوات التالية:

(١) نفرض أن لدينا مجتمعين كبيرين من المفردات هما:

س_{11} ، س_{21} ...... " س_{12} ، س_{22} ، ....

متوسط الأول μ_1 وتباينه σ_1^2 ومتوسط الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2

(٢) نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من المجتمع الأول حجمها n_1 مفردة ووجدنا وسطها الحسابي $\bar{\text{س}}_1$ وسحبنا عينة عشوائية من المجتمع الثاني n_2 مفردة ووجدنا وسطها الثاني الحسابي $\bar{\text{س}}_2$ وحسبنا الفرق بين الوسطين فوجدناه $\text{ف} = \bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2$.

(٣) نلاحظ أن $\bar{\text{س}}_1$ ما هى إلا قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها n_1 والمسحوبة من المجتمع الأول و $\bar{\text{س}}_2$ كذلك قراءة في مجتمع الأوساط الحسابية للعينات التي حجم كل منها n_2 مفردة والمسحوبة من المجتمع الثاني، كما أن ف ما هى إلا قراءة في مجتمع ثالث هو مجتمع الفروق بين متوسطات العينات العشوائية التي يمكن أخذها من المجتمعين والتي حجمها n_1 مفردة من المجتمع الأول و n_2 مفردة من المجتمع الثاني.

(٤) هناك نظرية إحصائية تنص على أنه:

إذا كان متوسطي المجتمعين الأصليين متساو يان يكون التوزيع الاحتمالي لمجتمع الفروق ف يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه الصفر وانحرافه المعياري:

$$ع(ف) = \sqrt{\frac{ع_{١}^{٢}}{ن_{١}} + \frac{ع_{٢}^{٢}}{ن_{٢}}}$$

(٥) بتطبيق ما سبق دراسته عن فترات الثقة وعن التوزيع الطبيعي يمكن رسم توزيع مجتمع الفروق ف وتحديد فترات الثقة عليه كما يلي :

I
٪٩٥
II ٪٢ II ٪٢
III III

-٢,٥٨ ع(ف) -١,٩٦ ع(ف) صفر +١,٩٦ ع(ف) +٢,٥٨ ع(ف)

ح [− ١,٩٦ ع (ف) ≤ ف ≤ ١,٩٦ ع (ف)] = ٩٥ ٪

ح [− ٢,٥٨ ع (ف) ≤ ف ≤ ٢,٥٨ ع (ف)] = ٩٩ ٪

وهاتان الفترتان تم بناؤهما على أساس افتراض أن المجتمعين الأصليين لهما نفس المتوسط .

ونتيجة الاختبار تتوقف على موقع الفرق ف بالنسبة لهاتين الفترتين و يكون أمامنا ثلاث حالات .

الحالة الأولى : أن تقع ف داخل الفترة الأولى (في المنطقة I) على الرسم و يكون معنى هذا أنه يحتمل أن يكون المجتمعان المسحوب منهما العينتان لهما نفس المتوسط ومع ذلك يظهر هذا الفرق بين متوسطي العينتين وهذا الاحتمال قدره ٩٥٪ هو احتمال كبير لهذا نستبعد وجود اختلاف بين متوسطي المجتمعين الأصليين ونعزي الفرق ف إلى مجرد الصدفة .

الحالة الثانية: أن تقع ف خارج الفترة الثانية (في المنطقة III على الرسم) ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ١٪ وهو احتمال صغير وعليه يكون الفرق ف فرقا حقيقيا (معنويا) غير راجع إلى مجرد الصدفة .

الحالة الثالثة : أن تقع ف بين الفترة الأولى والثانية (في المنطقة II على الرسم) ومعنى هذا أن احتمال أن يكون المجتمعان لهما نفس المتوسط أقل من ٢٪ وهذا احتمال صغير أي أن احتمال أن يكون الفرق ف راجعا للصدفة هو احتمال ضعيف و يرجح أن يكون هناك فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين الأصليين لهذا يجب سحب عينتين أخريتين لاستخدامهما في الحكم إذا أمكن ذلك . أما

إذا كان ذلك متعذرا فيكون القرار مثل القرار في الحالة الأولى تماما ولكن مع شيء من الحذر.

ملاحظة (٣) : في الخطوة (٤) نجد أن قيمة ع (ف) تعتمد على تباين المجتمعين الأصليين $سَ_1^2$، $سَ_2^2$ وحيث أنهما عادة يكونان مجهولين. لذا يمكن الاستعاضة عنهما بتباين العينتين $ع_1^2$، $ع_2^2$ و يكون:

$$ع\,(ف) = \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

ملاحظة (٤) : في الخطوة (١) كان كلامنا مقتصرا على المجتمعات الكبيرة. أما إذا كان أحد المجتمعين محدودا أو كلاهما محدود فالتغيير الوحيد في كل ما سبق في تقدير ع (ف).

فإذا كان المجتمع الأول محدودا وحجمه $ن_1$ تكون ع (ف) كما يلي:

$$ع\,(ف) = \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1}\left(\frac{ن_1 - ن_1}{ن_1 - 1}\right) + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

و بالمثل إذا كان المجتمع الأول كبيرا والثاني محدودا وحجمه $ن_2$ تكون

$$ع\,(ب) = \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}\left(\frac{ن_2 - ن_2}{ن_2 - 1}\right)}$$

أما إذا كان المجتمعان محدودين، حجم الأول $ن_1$ والثاني $ن_2$ تكون:

$$ع\,(ف) = \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1}\left(\frac{ن_1 - ن_1}{ن_1 - 1}\right) + \frac{ع_2^2}{ن_2}\left(\frac{ن_2 - ن_2}{ن_2 - 1}\right)}$$

مثال (٤) : أخذت عينة مكونة من ٢٠٠ عامل من إحدى الصناعات فوجد أن متوسط أجرهم اليومي ٧٠ ريالا مع انحراف معياري ١٢ ريالا وأخذت عينة أخرى حجمها ٥٠ من العاملات من نفس الصناعة فوجد أن متوسط أجرهن اليومي ٦٠ ريالا مع انحراف معياري ٥ ريالات فهل يمكن أن نستنتج من هذه المعلومات أن العمال يتقاضون أجورا أعلى من العاملات في هذه الصناعة ؟

الحل

$\bar{سَ}_1$ = ٧٠ ريال $ع_1$ = ١٢ ريال $ن_1$ = ٢٠٠ عامل

$\bar{س}_٢$ = ٦٠ ريال $ع_٢$ = ٥ ريال $ن_٢$ = ٥٠ عاملة

الفرق ف = $\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$ = ٧٠ − ٦٠ = ١٠ ريال

$$ع(ف) = \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}} = \sqrt{\frac{١٤٤}{٢٠٠} + \frac{٢٥}{٥٠}}$$

$$= \sqrt{٧٢ر + ٥٠ر} = ١١ر١$$

وتكون فترتا الثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ بفرض عدم وجود اختلاف بين أجور العمال والعاملات كما يلي :

الفترة الأولى : ± ٩٦ر١ × ١١ر١ = ± ١٨ر٢

الفترة الثانية : ± ٥٨ر٢ × ١١ر١ = ± ٨٦ر٢

وبرسم فترتي الثقة على محور ف نجدهما كما يلي :

ف: − ٨٦ر٢ ، − ١٨ر٢ ، + ١٨ر٢ ، + ٨٦ر٢

والآن نرى موقع ف على المحور نجد أنها تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن أجور العمال أكبر من أجور العاملات في هذه الصناعة.

مثال (٥) : أخذت عينة حجمها ٥٠ طالبا من طلبة كلية الأرصاد البالغ عددهم ١٥٠ طالبا فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٦٥ سم والانحراف المعياري للطول ٥ سم وأخذت عينة أخرى حجمها ٦٠ طالبا من طلبة كلية العلوم البالغ عددهم ٣٠٠ طالب فوجد أن متوسط الطول في العينة ١٧٥ سم والانحراف المعياري للطول ٧ سم . فهل نستنتج من هذه المعلومات أن طلبة كلية العلوم أطول قامة من طلبة كلية الأرصاد؟

الحل

$\bar{س}_١$ = ١٧٥ سم $ع_١$ = ٧ $ن_١$ = ٦٠ $N_١$ = ٣٠٠

$\bar{س}_٢$ = ١٦٥ سم $ع_٢$ = ٥ $ن_٢$ = ٥٠ $N_٢$ = ١٥٠

الفرق ف = $\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$ = ١٧٥ − ١٦٥ = ١٠ سم

نكون فترتا الثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ ولذا نحسب ع (ف) .

وحيث أن المجتمعين الأصليين محدودان فإن :

$$\text{ع}(\text{ف}) = \sqrt{\frac{\text{ع}_1^2}{\tilde{\text{ن}}_1}\left(\frac{\text{ن}_1 - \tilde{\text{ن}}_1}{\text{ن}_1 - 1}\right) + \frac{\text{ع}_2^2}{\tilde{\text{ن}}_2}\left(\frac{\text{ن}_2 - \tilde{\text{ن}}_2}{\text{ن}_2 - 1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٩}{٦٠}\left(\frac{٣٠٠ - ٦٠}{٣٠٠ - ١}\right) + \frac{٢٥}{٥٠}\left(\frac{١٥٠ - ٥٠}{١٥٠ - ١}\right)}$$

$$= \sqrt{\text{٠ر٨١٧} \times \text{٠ر٨} + \text{٠ر٥} \times \text{٠ر٦٧}}$$

$$= \sqrt{\text{٠ر٦٥} + \text{٠ر٣٣٥}} = \text{٠ر٩٩}$$

وعلى ذلك تكون حدود فترتي الثقة هما :

الأولى: $\pm$ ١ر٩٦ × ٠ر٩٩ = $\pm$ ١ر٩٤

الثانية: $\pm$ ٢ر٥٨ × ٠ر٩٩ = $\pm$ ٢ر٥٥

و برسم فترتي الثقة على محورف نجدهما كما يلي :

ف — ٢ر٥٥ ، ١ر٩٤ ، صفر ، − ١ر٩٤ ، − ٢ر٥٥

وحيث أن قيمة ف = ١٠ وهى تقع خارج الفترة الثانية فإننا نستنتج أن طلبة كلية العلوم أطول قامة من طلبة كلية الأرصاد .

(٧ــ٥) ــ اختبار مدى عشوائية العينة :

تكلما في الباب السابق عن طرق اختيار العينات العشوائية واتضح لنا كيف أن الصدفة تلعب دورا كبيرا في هذا الاختيار ــ لهذا يهمنا دائما بعد اختيار العينة أن نختبر مدى عشوائيتها ــ أي إلى مدى تعتبر هذه العينة صورة حقيقية أو صورة مصغرة للمجتمع الذي سحبت منه . ولاجراء مثل هذا الاختبار نتعمد أثناء جمع بيانات العينة الحصول على بيانات إضافية تفيدنا في حساب مقياس معين يكون معلوما لدينا قيمته الحقيقية في المجتمع الأصلي وذلك سواء من تعداد سابق أو بأي وسيلة أخرى فيكون لدينا قيمتان لهذا المقياس هما قيمته الحقيقية في المجتمع وقيمته المحسوبة من العينة المختارة ، وبمقارنة هاتين القيمتين باستخدام فترات الثقة يمكن الحكم على مدى عشوائية العينة وسنقوم

بإيضاح ذلك مستخدمين الوسط الحسابي $\bar{س}$ ثم النسبة ل كمقياسين إحصائيين للحكم على عشوائية العينة وذلك كما يلي :

أولا : باستخدام الوسط الحسابي $\bar{س}$:

١ ـــ نفرض أن المتوسط والانحراف المعياري في المجتمع هما μ، σ قيمتان معلومتان في هذه الحالة.

٢ ـــ نحسب الوسط الحسابي من بيانات العينة.

٣ ـــ نعلم من البند (٦ـــ٢) عند بناء فترة الثقة للوسط الحسابي بأن :

احتمال أن تقع $\bar{س}$ بين ($\mu - ١٫٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ، $\mu + ١٫٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$) هو ٠٫٩٥

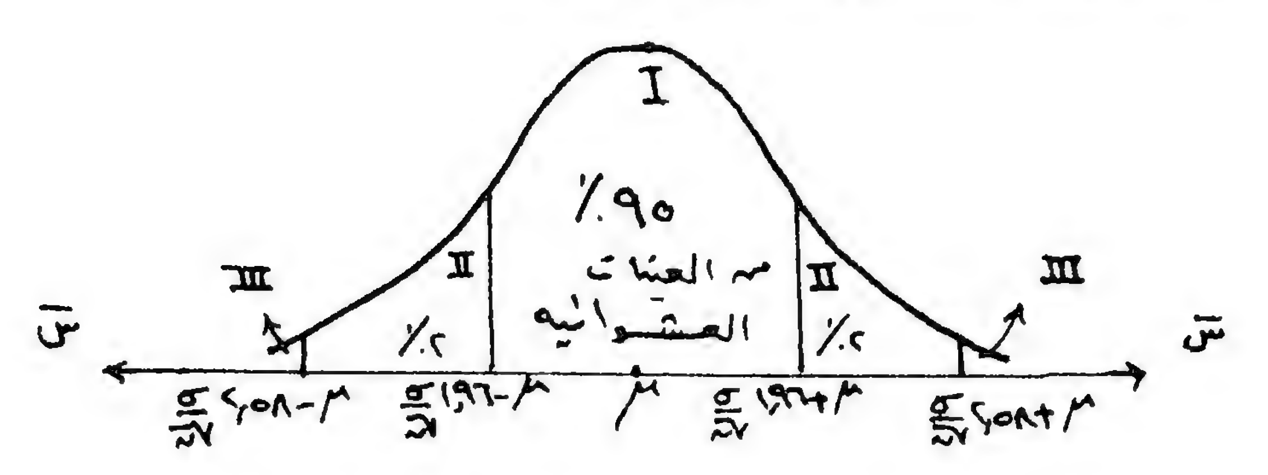
أي أنه في ٩٥٪ من العينات العشوائية تقع $\bar{س}$ بين

$$\left(\mu - ١٫٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right) ، \left(\mu + ١٫٩٦ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right)$$

وكذلك في ٩٩٪ من العينات العشوائية تقع $\bar{س}$ بين

$$\left(\mu - ٢٫٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right) ، \left(\mu + ٢٫٥٨ \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \right)$$

٤ ـــ برسم هاتين الفترتين على محور التوزيع الطبيعي كما يلي :



٥ ـــ نبحث عن موقع الوسط الحسابي $\bar{س}$ بالنسبة إلى فترتي الثقة السابقتين فيكون لدينا ثلاث حالات :

(أ) إذا وقعت $\bar{س}$ داخل الفترة الأولى (٩٥٪) أي في المنطقة I كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة تتحقق في ٩٥٪ من العينات العشوائية مما يطمئننا على عشوائية العينة. ولهذا نعتبر أن العينة المسحوبة عشوائية.

(ب) إذا وقعت $\bar{س}$ خارج الفترة (٩٩٪) أي في المنطقة II يكون معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ١٪ من العينات العشوائية وفي هذه الحالة يمكن الحكم بأن العينة غير عشوائية ولا يمكن استخدام بياناتها بأي حال من الأحوال لهذا لابد من استبدال العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية.

(جـ) إذا وقعت $\bar{س}$ خارج الفترة الأولى (٩٥٪) ولكن داخل الفترة الثانية (٩٩٪) أي في المنطقة III كان معنى ذلك أن النتيجة التي حصلنا عليها من هذه العينة لا تتحقق إلا في أقل من ٢٪ من العينات العشوائية وهذا يجعلنا نشك في عشوائية العينة وفي هذه الحالة يفضل استبدال هذه العينة بعينة أخرى أكثر عشوائية إذا أمكن ذلك أما إذا لم يكن ذلك ممكنا أو كان يكلف تكلفة كبيرة فنستخدم بيانات هذه العينة ولكن بشيء من الحذر.

ثانيا : باستخدام النسبة ل :

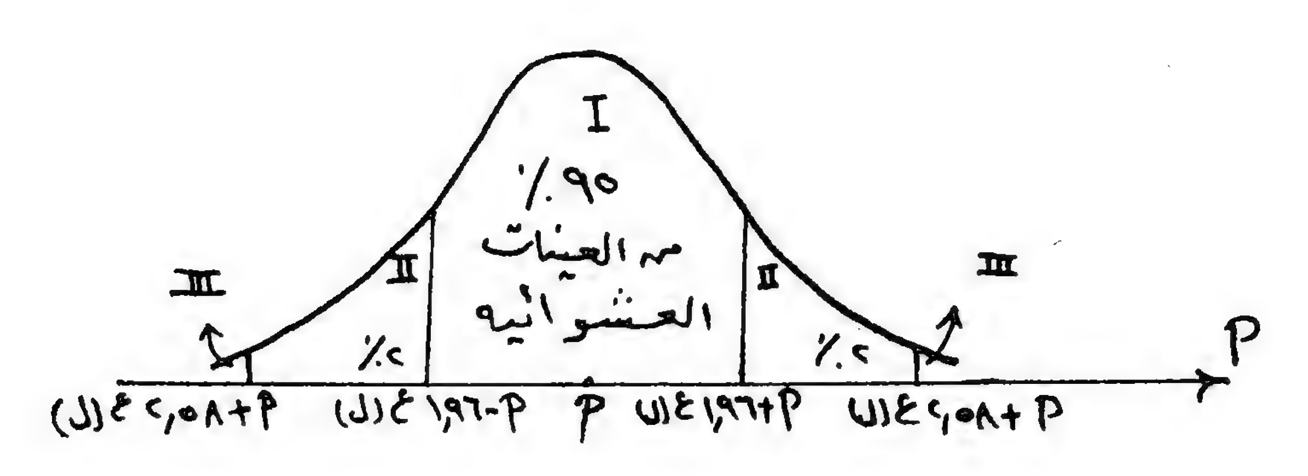
نفرض أننا نعرف النسبة P في المجتمع ثم حسبنا النسبة ل من العينة فإن فترتي الثقة ٩٥٪، ٩٩٪ يمكن كتابتها في الصورة التالية:

احتمال أن تقع ل بين P ± ١٫٩٦ ع (ل) يساوي ٩٥٪.

، احتمال أن تقع ل بين P ± ٢٫٥٨ ع (ل) يساوي ٩٩٪.

علما بأن ع (ل) = $\sqrt{\frac{P(1-P)}{ن}}$

وعلى هذا يمكن رسم هاتين الفترتين على محور التوزيع المعتاد كما يلي:



و بنفس الأسلوب السابق يكون أمامنا ثلاث حالات :

(أ) إذا وقعت ل (المحسوبة من العينة) في المنطقة I تعتبر العينة عشوائية .

(ب) إذا وقعت في المنطقة II نشك في عشوائية العينة .

(جـ) إذا وقعت ل خارج المناطق I ، II
نقطع بأن العينة غير عشوائية .

مثال (٦) : سحبت عينة حجمها ١٠٠ مفردة من إحدى القرى وذلك لدراسة ميزانية الأسرة في الريف ــ فإذا كان متوسط العمر بين أفراد العينة هو ٢٥ سنة وإذا كان معلوم من بيانات تعداد سابق أن متوسط العمر في القرية كلها ٣٠ سنة : والانحراف المعياري ٥ سنوات فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

الحل

نعلم أن متوسط العمر في المجتمع μ = ٣٠ سنة
والانحراف المعياري للعمر σ = ٥ سنوات
وحجم العينة ن = ١٠٠
ومتوسط العمر في العينة $\bar{س}$ = ٢٥ سنة .

فترة الثقة ٩٥٪ هى $\left(٣٠ \pm ١ر٩٦ \times \frac{٥}{\sqrt{١٠٠}}\right)$

، فترة الثقة ٩٩٪ هى $\left(٣٠ \pm ٢ر٥٨ \times \frac{٥}{\sqrt{١٠٠}}\right)$

أي أن فترة الثقة الأولى هى (٢٩ر٠٢ ــ ٣٠ر٩٨) بدرجة ثقة ٩٥٪
وأن فترة الثقة الثانية هى (٢٨ر٧١ ــ ٣١ر٢٩) بدرجة ثقة ٩٩٪
وحيث أن $\bar{س}$ المحسوبة من العينة هى ٢٥ تقع خارج الفترتين السابقتين فإنه في حكم المؤكد أن هذه العينة غير عشوائية .

مثال (٧) : إذا كانت نسبة الأميين في إحدى القرى الكبيرة تساوي ٧٠٪ من السكان وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس القرية هى ٦٧٪ فماذا يكون حكمك على عشوائية هذه العينة ؟

الحل

فترة الثقة الأولى هى $\left(٠ر٧ \pm ١ر٩٦ \times \sqrt{\frac{٠ر٧ \times ٠ر٣}{١٠٠}}\right)$ بدرجة ثقة ٩٥٪

أي أن الفترة الأولى هى (٦١٪ ، ٧٩٪) بدرجة ثقة ٩٥٪

ولما كانت النسبة ل في العينة ٦٧٪ تقع داخل هذه الفترة الأ ولى فمعنى ذلك أن العينة عشوائية ولا داعي إذن لحساب الفترة الثانية.

* * *

تمارين

١ ــ إذا كان متوسط أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ٩٥٠ ساعة مع انحراف معياري ١٢٠ ساعة.
ادعى مدير المصنع أنه قد أدخلت تعديلات على وسائل الانتاج مما أطال أعمار هذا الإنتاج ــ ولاختبار ادعاء المدير أخذت عينة مكونة من ٨١ مصباحا وأضيئت حتى انحرقت جميعها وحسب متوسط أعمارها فوجد ١١٠٠ ساعة فهل يمكنك تأييد ادعاء المدير؟

٢ ــ البيانات التالية توضح الأجر الأسبوعي بالريالات لمجموعتين من العمال والعاملات في إحدى المصانع:

الأجر الاسبوعى بالريـــالات	٢٠٠ـ	٤٠٠ـ	٦٠٠ـ	٨٠٠ـ	١٠٠٠ـ	١٤٠٠ـ ٢٠٠٠	المجموع
عددالعمـــال	١٥	٢٥	٤٠	١٠	٥	٥	١٠٠
عدد العاملات	١٥	٢٢	١٧	٣	٢	١	٦٠

هل ترى من هذه البيانات أن أجور العمال أعلى من أجور العاملات في هذا المصنع؟ وضح إجابتك في الحالتين التاليتين:
الأولى: إذا كان عدد العمال والعاملات في المصنع كبيرا.
ثانيا: إذا كان عدد العمال في المصنع ٣٠٠ عامل والعاملات ٢٠٠ عاملة.

٣ ــ إذا كانت نسبة الأفراد الذين يقل سنهم عن ٢٠ سنة في إحدى المدن تساوي ٤٠٪ وكانت نسبتهم في عينة مكونة من ١٠٠ فرد من نفس المدينة ٤٥٪ فهل يمكن أن نستنتج من هذا الفرق بين النسبتين أن العينة لم تكن عشوائية؟

٤ ــ اختبر عشوائية العينة في التمرين السابق إذا كان حجمها ٥٠٠ بدلا من ١٠٠.

٥ ــ من المعروف أن متوسط الإنتاج اليومي للعامل في إحدى الصناعات ٦٠ قطعة والانحراف المعياري لهذا الإنتاج اليومي يساوي ٧ قطع. أخذت عينة عشوائية مكونة من ٩٠ عاملا من هذه الصناعة ودربوا تدريبا مهنيا و بعد التدريب وجد أن متوسط إنتاجهم اليومي ٦٥ قطعة.
فهل يدلنا هذا الفرق على أن التدريب المهني يرفع من إنتاج العامل؟

٦ ــ من المعروف أن نسبة الذكور بين المواليد تبلغ ٥١٫٥٪ وفي إحدى القرى ذات الدخل المنخفض كان عدد المواليد في عام ما ٢٥٠ من بينهم ١٣٥ من الذكور. فهل يدل ذلك على أن انخفاض الدخل يرفع من نسبة الذكور بين المواليد؟

٧ ــ مصنع ينتج نوعا معينا من المسامير طوله ٨ سم . أراد صاحبه التأكد من دقة الآلات فأخذ عينة عشوائية مكونة من ٥٠٠ مسمار و وجد أن توزيعها بحسب الأطوال كما يلي :

الطول بالمليمتر	٧٨ -	٧٩ -	٨٠ -	٨١ -	٨٢ -	٨٣ - ٨٤
عدد المسامير	٣٠	٦٠	١٠٠	٢٠٠	٨٠	٣٠

ولما كان متوسط هذه العينة يزيد عن الطول المطلوب فقد أمر صاحب المصنع بوقف الآلات على اعتبار أن الإنتاج أطول من اللازم . اختبر سلامة الأمر الذي أصدره صاحب المصنع .

٨ ــ من المعروف أن نسبة الإصابة بمرض معين في إحدى المناطق ٧٠٪ ــ ما رأيك في عشوائية عينة أخذت من هذه المنطقة و وجد أن نسبة الإصابة فيها ٦٥٪ وذلك في كل من الحالات الآتية :

أ ــ إذا كان حجم العينة ٢٠٠ فرد .

ب ــ إذا كان حجم العينة ٣٠٠ فرد .

جـ ــ إذا كان حجم العينة ٥٠٠ فرد .

٩ ــ أخذت مجموعتان متماثلتان من التلاميذ الأولى بها ٨١ تلميذا والثانية بها ١٠٠ تلميذ واستعمل في تدريس مادة الرياضيات المعاصرة للمجموعة الأولى طريقة خاصة بينما استعملت الطريقة العادية في تدريس هذه المادة للمجموعة الثانية ــ وفي نهاية العام وجد أن متوسط درجات المجموعة الأولى ٧٠ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات بينما كان متوسط درجات المجموعة الثانية ٦٥ درجة والانحراف المعياري ٦ درجات . فهل يمكننا أن نستنتج من هذه المعلومات أن الطريقة الخاصة تزيد من تحصيل التلاميذ ؟

* * *

الباب الثامن

تحليل نتائج العينات الصغيرة



تحليل نتائج العينات الصغيرة

(٨ـ١) مقدمة:

تكلمنا في الباب السادس عن طريقة تقدير متوسط المجتمع باستخدام متوسط العينة كما هو مبين في بند (٦ـ٢) وذكرنا أنه إذا كان لدينا مجتمع ما متوسطه μ وتباينه σ^2 وسحبنا منه عينات كبيرة حجم كل منها ن ووسطها $\bar{س}$ وتباينها $ع^2$ فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ يتبع تقريبا توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه $\frac{\sigma^2}{ن}$ أي أن:

$$ص = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

تتبع تقريبا توزيعا طبيعيا قياسيا. وقد استخدمنا هذه النتيجة الهامة في إيجاد تقدير لمتوسط المجتمع μ. ولكن في كثير من الدراسات يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا لذلك فإننا نستعيض عنه بتباين العينة $ع^2$ وفي هذه الحالة يظل المتغير

$$ص = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

يتبع تقريبا توزيع طبيعي قياس طالما كان حجم العينة كبيرا.
أما إذا كان حجم العينة صغيراً أي أقل من ٣٠ مفردة فان المتغير:

$$\frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

لم يعد يتبع التوزيع الطبيعي القياسي وإنما يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن ـ ١). ومن ذلك نلاحظ أن المتغير:

$$\frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا إذا كان حجم العينة ن كبيرا بينما يتبع توزيع ت بدرجات حرية

(ن ــ ١) إذا كان حجم العينة صغيرا و على ذلك تكون أساليب تحليل نتائج العينات الصغيرة هى نفس أساليب تحليل نتائج العينات الكبيرة مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغيرت .

ملاحظة (١) :

عندما يكون حجم العينة كبيرا فإن تباينها يحسب من الصيغة :

$$ع^2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}$$

أما في حالة العينات الصغيرة فإن تباين العينة يحسب من الصيغة :

$$ع^2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن - 1} \quad .$$

وذلك لأسباب إحصائية لا نريد التعرض لها الآن .

(٨ــ٢) ــ تقدير متوسط المجتمع باستخدام عينة صغيرة :

نفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافه المعياري σ مجهولان ، ونرغب في تقدير متوسط هذا المجتمع وذلك باستخدام عينة عشوائية صغيرة مسحوبة منه . نحسب متوسط العينة $\bar{س}$ وكذلك انحرافها المعياري ع ، و باستخدام نفس الأسلوب المتبع في بند (٦ــ٢) عند تحديد فترة ثقة للمتوسط μ مع مراعاة أن المتغير: $\frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$ يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن ــ ١) نجد أن :

$$ح \left[\bar{س} - ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \right] = 1 - \alpha$$

حيث $\pm ت_{\alpha/2}$ هما قيمتا المتغيرت اللتان تحصران بينهما احتمال قدرة (١ ــ α) وهذا يعني أن :

$$\bar{س} - ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

بدرجة ثقة قدرها (١ ــ α) . وهذه فترة ثقة حدها الأدنى $\left(\bar{س} - ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \right)$

وحدها الأعلى $\left(\bar{س} + ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \right)$.

مثال (١) : أخذت عينة عشوائية مكونة من ٢٥ عاملا من عمال صناعة ما فوجد أن متوسط أجرهم الشهري ٤٢٥٠ ريالا مع انحراف معياري ٤٠٠ ريال .

والمطلوب إيجاد فترة ثقة لمتوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

الحل

١ـ نفرض أن μ متوسط الدخل الشهري لعمال هذه الصناعة.

٢ـ ن = ٢٥، سَ = ٤٢٥٠ ريال، ع = ٤٠٠ ريال

٣ـ تكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{س} - ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \leq \mu \leq \bar{س} + ت_{\alpha/2} \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

بدرجة ثقة (١ـ α).

٤ـ حيث ان درجة الثقة (١ـ α)=٠٫٩٥ ودرجات الحرية ن ـ ١=٢٤ـ نبحث في جدول ت أمام الصف م=٢٤ نجد أن قيمة ت التي تجعل مساحة الذيلين تساوي ٠٫٠٥ هي:

$$ت_{\alpha/2} = ٢٫٠٦٤$$

٥ـ $$\frac{ع}{\sqrt{ن}} = \frac{٤٠٠}{\sqrt{٢٥}} = ٨٠$$

، $$ت_{\alpha/2} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} = ٢٫٠٦٤ \times ٨٠ = ١٦٥٫١٢$$

∴ الحد الأدنى لفترة الثقة = ٤٢٥٠ ـ ١٦٥٫١٢ = ٤٠٨٤٫٨٨ ريالا

والحد الأعلى لفترة الثقة = ٤٢٥٠ + ١٦٥٫١٢ = ٤٤١٥٫١٢ ريالا

وبهذا يمكن القول أن متوسط الأجر الشهري لعمال الصناعة كلها يتراوح بين ٤٠٨٤٫٨٨، ٤٤١٥٫١٢ ريالا وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

مما سبق يتضح لنا جليا عدم وجود أي اختلاف في تقدير متوسط المجتمع من بيانات عينات صغيرة عنه باستخدام بيانات عينات كبيرة إلا في استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت ـ وهذا ينطبق على اختبار الفروض.

(٨ـ ٣) اختبار فرض معين حول متوسط المجتمع:

نفرض أن لدينا مجتمعا وسطه μ وتباينه σ^2 مجهولان ونرغب في اختبار فرض معين حول المتوسط μ باستخدام عينات صغيرة. نتبع نفس الأسلوب المستخدم في البند (٧ـ٢) مع استبدال المتغير الطبيعي القياسي ص بالمتغير ت كما يتضح من المثال التالي:

مثال (٢) : إذا كان متوسط الوقت الذي يستغرقه العامل في صناعة معينة لتغليف سلعة ما هو ٥٠ دقيقة.أدخلت تعديلات على عملية التغليف بهدف اختصار الوقت ولاختبار ذلك أخذت عينة مكونة من ١٢ عامل فوجد أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف هو ٤١ دقيقة مع انحراف معياري ١٠ دقائق .

فهل ترى أن هناك أثرا حقيقيا للتعديلات التي أدخلت على عملية التغليف ؟ استخدم مستوى معنوية ٠٥ر٠ .

الحل

أولا : الفرض الإحصائي :

فرض العدم ف٠: μ = ٥٠ دقيقة .

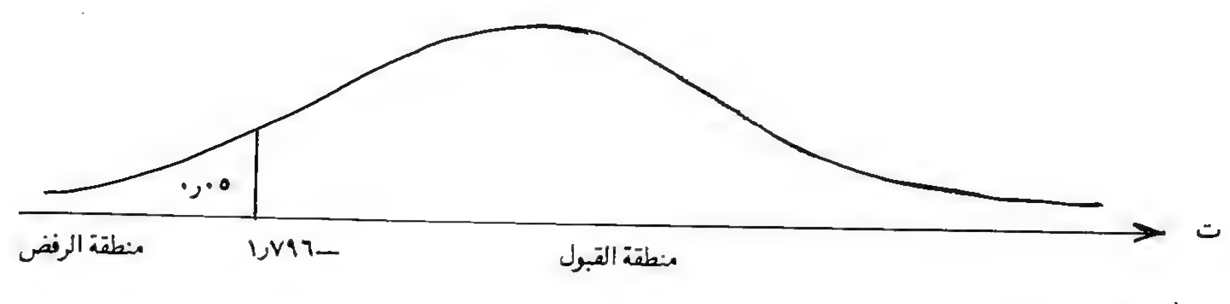
الفرض البديل ف١: μ > ٥٠ دقيقة

ثانيا : الاختبار الإحصائي :

(أ) باعتبار أن فرض العدم صحيح نعلم أن: $\dfrac{\bar{س} - ٥٠}{\dfrac{ع}{\sqrt{ن}}}$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن ــ ١) .

(ب) من الفرض البديل (μ > ٥٠) وعند مستوى معنوية α = ٠٥ر٠ يمكن استخدام جدول توزيع ت عند درجات الحرية م = ١١ لتحديد منطقتي القبول والرفض على محور ت كما في الشكل الآتي :



(م = ١١)

(جـ) من بيانات العينة نحسب قيمة ت

قيمة ت المحسوبة = $\dfrac{\bar{س} - ٥٠}{\dfrac{ع}{\sqrt{ن}}}$

$$= \frac{41 - 50}{\frac{10}{\sqrt{12}}} = -3.11$$

ثالثا : اتخاذ القرار:

بما أن ت = ـــ١١ر٣ تقع في منطقة الرفض لذلك نرفض فرض العدم عند مستوى المعنوية ٥٪ وهذا يعني أن متوسط الوقت اللازم لعملية التغليف قد انخفض بالفعل وأصبح أقل من ٥٠ دقيقة وهذا يبرر استخدام الطريقة الجديدة في عملية التغليف .

ملاحظة (٢) :

يجب أن نتذكر أنه لو كان الفرض البديل هو ف$_1$: $\mu > 50$ فإن منطقة الرفض تكون على الذيل الأيمن من توزيع ت كذلك لو كان الفرض البديل هو ف$_1$: $\mu \neq 50$ فإن منطقة الرفض تكون على ذيلي توزيع ت .

(٨ــ٤) ــ إنشاء فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين :

كثيرا ما نحتاج لتقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين بفترة ثقة مناسبة . فمثلا قد يرغب مزارع في معرفة مدى جودة نوع جديد من بذور القمح وذلك بأن يستخدم هذا النوع الجديد في الزراعة ثم يقدر الفرق بين متوسط المحصول من هذا النوع الجديد ومتوسط المحصول من النوع القديم الذي اعتاد على زراعته .

والآن نفرض أن لدينا مجتمعين يتبعان توزيعا طبيعيا متوسط الأول μ_1 ومتوسط الثاني μ_2 وأن تباينهما σ^2 متساوٍ ومجهول. فإذا أخذنا عينات عشوائية صغيرة حجم كل منها ن$_1$ من المجتمع الأول ومتوسطها $\bar{س}_1$ وتباينها ع$^2_1$ وأخذنا عينات عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني حجم كل منها ن$_2$ ومتوسطها $\bar{س}_2$ وتباينها ع$^2_2$ فإن هناك نظرية إحصائية تنص على أن المتغير:

$$\frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{ع \sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن$_1$ + ن$_2$ ــ ٢) حيث أن ع هى تقدير للتباين σ^2 محسوبة من بيانات العينتين من العلاقة :

$$ع^2 = \frac{(ن_1 - 1)\, ع^2_1 + (ن_2 - 1)\, ع^2_2}{ن_1 + ن_2 - 2} .$$

و باستخدام هذه النظرية وخواص توزيع ت التي سبق دراستها في البند (٣ـ٨) نستطيع القول إن:

$$\text{ح}\left[-\text{ت}_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\text{ع}\sqrt{\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}}} \leq \text{ت}_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

و باستخدام نفس الأساليب السابقة في حالة العينات الكبيرة فإننا نستطيع القول إن:

$$\text{ح}\left[(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) - \text{ت}_{\alpha/2}\,\text{ع}\sqrt{\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) + \text{ت}_{\alpha/2}\,\text{ع}\sqrt{\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}}\right] = 1 - \alpha$$

وعلى ذلك تكون فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ بدرجة ثقة $(1-\alpha)$ هي:

$$(\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2) \mp \text{ت}_{\alpha/2}\,\text{ع}\sqrt{\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}}$$

مثال (٣) : رغبت وزارة المعارف في دراسة الفرق بين مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة وطلاب الرياضيات التقليدية، فأخذت عينة مكونة من ١٢ طالبا من طلاب الرياضيات المعاصرة وعشرة من طلاب الرياضة التقليدية وأعطتهم امتحانا عاما في الرياضيات ــ فكان متوسط درجات طلبة الرياضيات المعاصرة ٨٥ درجة مع انحراف معياري ٤ درجات بينما كان متوسط درجات طلاب الرياضيات التقليدية ٨١ درجة مع انحراف معياري ٥ درجات ــ والمطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق بين مستوى طلاب الرياضيات الحديثة والتقليدية وذلك بدرجة ثقة ٩٠٪.

الحل

١ ــ نفرض أن μ_1 ، μ_2 هما متوسطي درجات طلاب الرياضيات المعاصرة والرياضات التقليدية على الترتيب.

٢ ــ المطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ بدرجة ثقة ٩٠٪.

٣ ــ نعلم أن :

عدد طلاب العينة الأولى $ن_{١} = ١٢$ ، $\overline{س}_{١} = ٨٥$ ، $ع_{١} = ٤$

، عدد طلاب العينة الثانية $ن_{٢} = ١٠$ ، $\overline{س}_{٢} = ٨١$ ، $ع_{٢} = ٥$

∴ تقدير التباين المشترك هو:

$$ع^{٢} = \frac{(ن_{١} - ١)\, ع_{١}^{٢} + (ن_{٢} - ١)\, ع_{٢}^{٢}}{ن_{١} + ن_{٢} - ٢}$$

$$= \frac{١١ \times ١٦ + ٩ \times ٢٥}{١٢ + ١٠ - ٢} = ٢٠ر٠٥$$

$$∴ ع = \sqrt{٢٠ر٠٥} = ٤ر٤٧٨$$

٤ ــ ∵ درجة الثقة المطلوبة ٩٠ر٠

∴ $\alpha = ١٠ر٠$ ، $\frac{\alpha}{٢} = ٠٥ر٠$ ، ومن جدول ت وعند درجات الحرية .

$$م = ن_{١} + ن_{٢} - ٢ = ١٢ + ١٠ - ٢ = ٢٠$$

نجد أن $ت_{٠٥ر٠} = ١ر٧٢٥$

٥ ــ وبهذا تكون فترة الثقة الفرق $\mu_{١} - \mu_{٢}$ عند درجة الثقة ٩٠٪ هى:

$$(\overline{س}_{١} - \overline{س}_{٢}) \mp ت_{\frac{\alpha}{٢}}\; ع \sqrt{\frac{١}{ن_{١}} + \frac{١}{ن_{٢}}}$$

وبالحساب نجد أن فترة الثقة هى:

$$(٨٥ - ٨١) \mp ١ر٧٢٥ \times ٤ر٤٧٨ \sqrt{\frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٠}}$$

الحد الأدنى لفترة الثقة $= ٤ - ٣ر٣١ = ٦٩ر٠$

والحد الأعلى لفترة الثقة $= ٤ + ٣ر٣١ = ٧ر٣١$

وبهذا يكون حدى الثقة الأدنى والأعلى موجبان وهذا يوضح ارتفاع مستوى طلاب الرياضيات المعاصرة عن طلاب الرياضيات التقليدية.

(٨ــ٥) ــ اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين:

كثير من الدراسات تتطلب مقارنة بين متوسطي مجتمعين بناء على معلومات من عينات صغيرة

مسحوبة من كل من المجتمعين. فمثلا قد ترغب الجامعة عمل مقارنة بين الطلبة والطالبات لمعرفة مستوى التحصيل لكل منهما — أو كأن تقوم الدولة بدراسة مقارنة بين متوسط دخل الأسر في منطقتين معينتين أو كأن تقوم وزارة المعارف بدراسة لمعرفة الفرق بين نظامين من أنظمة التعليم لتتبنى الأفضل منهما.

في مثل هذه الدراسات يكون المطلوب اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين فنفرض أن لدينا مجتمعا يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_1 وتباينه σ^2 وأن هناك مجتمعا آخر يتبع كذلك توزيعا طبيعيا وسطه μ_2 وله نفس التباين σ^2. والآن نرغب في إجراء الاختبار الإحصائي الآتي:

(أ) — **فرض العدم : $ف_0$: $\mu_1 = \mu_2$**

أو $\mu_1 - \mu_2 =$ صفر

وهذا يعني أنه لا يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين.

— والفرض البديل ف يكون أحد الحالات الآتية:

(I) $\mu_1 \neq \mu_2$ أى $\mu_1 - \mu_2 \neq$ صفر

(II) $\mu_1 > \mu_2$ أى $\mu_1 - \mu_2 >$ صفر

(III) $\mu_1 < \mu_2$ أى $\mu_1 - \mu_2 <$ صفر

(ب) لذلك نسحب عينة عشوائية صغيرة حجمها $ن_1$ من المجتمع الأول وليكن وسطها الحسابي $\bar{س}_1$ وتباينها $ع_1^2$ ونسحب عينة عشوائية صغيرة من المجتمع الثاني وليكن وسطها الحسابي $\bar{س}_2$ وتباينها $ع_2^2$.

(جـ) من النظرية الموضحة في بند (٨ــ٤) و باعتبار أن فرض العدم صحيح يكون

$$ت = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{ع\sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية ($ن_1 + ن_2 - 2$).

(د) باستخدام الفرض البديل $ف_1$ ومستوى المعنوية α تتحدد منطقتي القبول والرفض على محور توزيع ت.

(هـ) بحساب قيمة ت المشاهدة نستطيع اتخاذ القرار المناسب حسب وقوعها في منطقة القبول أو منطقة الرفض كما يتضح من المثال الآتي:

مثال (٤) : لمقارنة متوسط أوزان الطلبة والطالبات أخذت عينة حجمها ١٠ طلاب فكانت أوزانهم بالكيلو جرام هي:

٦٧ــ ٧٥ــ ٧٤ــ ٧٢ــ ٨٠ــ ٧١ــ ٥٩ــ ٦٦ــ ٥٤ــ ٨٢ وأخذت عينة مكونة من ٨ طالبات فكانت أوزانهم بالكيلو جرام كما يلي:

٥٢ــ٧٣ــ٦٢ــ٦٨ــ٦٧ــ٦٣ــ٦٧ــ٦٨

فهل يمكن القول أن الطالبات أقل وزنا من الطلاب؟

استخدم مستوى المعنوية ٥٪.

الحل

نفرض أن μ_1 متوسط أوزان الطلاب.

μ_2 متوسط أوزان الطالبات

فرض العدم ف٠: $\mu_1 = \mu_2$ أى أن $\mu_1 - \mu_2 =$ صفر

الفرض البديل ف١: $\mu_1 > \mu_2$ أى أن $\mu_1 - \mu_2 >$ صفر

نحسب الوسط الحسابي والتباين لكل عينة كما يلي:

$س_1$	$س_1 - \bar{س}_1$	$(س_1 - \bar{س}_1)^2$	$س_2$	$س_2 - \bar{س}_2$	$(س_2 - \bar{س}_2)^2$
٦٧	−٣	٩	٥٢	−١٣	١٦٩
٧٥	٥	٢٥	٧٣	٨	٦٤
٧٤	٤	١٦	٦٢	−٣	٩
٧٢	٢	٤	٦٨	٣	٩
٨٠	١٠	١٠٠	٦٧	٢	٤
٧١	١	١	٦٣	−٢	٤
٥٩	−١١	١٢١	٦٧	٢	٤
٦٦	−٤	١٦	٦٨	٣	٩
٥٤	−١٦	٢٥٦			
٨٢	١٢	١٤٤			
٧٠٠		٦٩٢	٥٢٠		٢٧٢

$\bar{س}_1 = \frac{٧٠٠}{١٠} = ٧٠$ كجم $\qquad ع_1^2 = \frac{٦٩٢}{٩}$

$$\bar{س}_٢ = \frac{٥٢٠}{٨} = ٦٥ \text{ كجم} \qquad ع_٢^٢ = \frac{٢٧٢}{٧}$$

$$ع^٢ = \frac{(ن_١ - ١)ع_١^٢ + (ن_٢ - ١)ع_٢^٢}{ن_١ + ن_٢ - ٢}$$

$$= \frac{\sum (س_١ - \bar{س}_٢)^٢ + \sum (س_٢ - \bar{س}_٢)^٢}{ن_١ + ن_٢ - ٢}$$

$$= \frac{٦٩٢ + ٢٧٢}{١٠ + ٨ - ٢} = \frac{٩٦٤}{١٦} = ٦٠٫٢٥$$

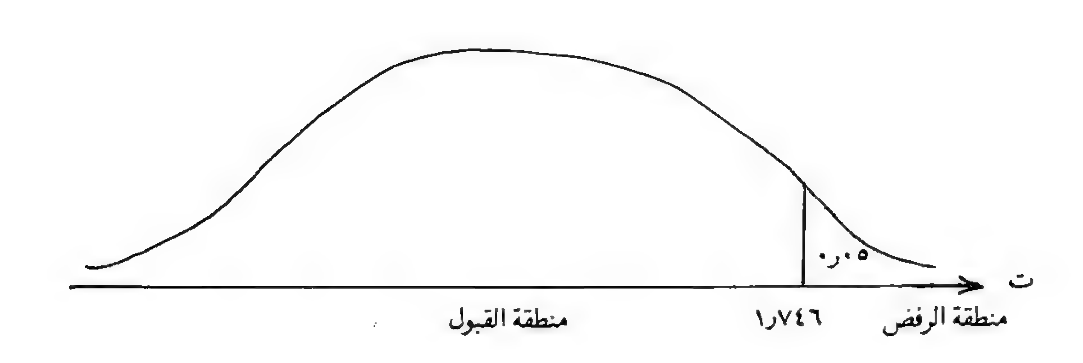
$$\therefore ع = \sqrt{٦٠٫٢٥} = ٧٫٧٦ \text{ كجم}$$

باعتبار أن فرض العدم صحيح فإن:

$$\frac{\bar{س}_١ - \bar{س}_٢}{ع \sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية $(ن_١ + ن_٢ - ٢)$.

باستخدام الفرض البديل $(\mu_١ < \mu_٢)$ وعند مستوى المعنوية ٠٥ر٠ تحدد منطقة الرفض على الذيل الأيمن من محور توزيع ت كما هو مبين على الشكل الآتي:



تحسب قيمة ت المشاهدة من بيانات العينة باعتبار أن فرض العدم صحيح.

$$\therefore \text{ت المشاهده} = \frac{٧٠ - ٦٥}{٧٫٧٦ \sqrt{\frac{١}{١٠} + \frac{١}{٨}}} = \frac{٥}{٣٫٦٨} = ١٫٣٦$$

بما أن ت المشاهدة تقع في منطقة القبول فعليه نقبل فرض العدم وهذا يعني أنه ليس هناك أي فرق بين متوسط أوزان الطلاب ومتوسط أوزان الطالبات وأن الفرق الذي يظهر من بيانات العينتين يرجع إلى مجرد الصدفة.

* * *

تماريـــــن

تمارين

١ ــ أخذت عينة عشوائية مكونة من ١٠علب من علب السمنة التي ينتجها أحد المصانع فكانت أوزانها بالكيلو جرام كما يلي:

٨ر٩ ــ ١ر١٠ ــ ٤ر١٠ ــ ٩ر٩ ــ ٨ر٩ ــ ٠ر١٠ ــ ٢ر١٠ ــ ٧ر٩ ــ ٩ر٩ ــ ٣ر١٠

والمطلوب:

أ ــ أوجد فترة ثقة لمتوسط وزن العلبة من إنتاج هذا المصنع بدرجة ثقة ٩٥٪

ب ــ هل يمكن تأييد ادعاء مدير المصنع بأن متوسط وزن العلبة ١٠ كيلوجرام؟

٢ ــ قام خمسة من المساحين بقياس مساحة قطعة أرض فكانت المساحة التي حصل عليها كل منهم هى:

٢٨ر٨ ــ ٢٥ر٨ ــ ٢٢ر٨ ــ ٢٩ر٨ ــ ٢٣ر٨

استخدم هذه المعلومات في إيجاد فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٨٪ للمساحة الحقيقية لهذه القطعة.

٣ ــ لاختبار تأثير نوع جديد من السماد على محصول القمح في مزرعة نموذجية تم تخصيص ٢٤ قطعة أرض متساوية المساحة والخصوبة والرعاية ــ وتم زراعة القطع جميعها بمحصول القمح مع معالجة نصف القطع بالسماد الجديد وترك النصف الثاني بدون سماد. فإذا كان متوسط وزن المحصول من القطع التي لم تعالج بالسماد الجديد هو ٨ر٤ كجم بانحراف معياري ٣ر٢ كجم بينما كان متوسط وزن المحصول الناتج من القطع المعالجة بالسماد الجديد هو ١ر٥ كجم بانحراف معياري ٨ر١ كجم ــ فهل تستنتج من ذلك أن السماد الجديد يؤدي إلى رفع إنتاج محصول القمح؟

استخدم مستوى المعنوية التالي:

أ ــ $\propto$ = ١٪

ب ــ $\propto$ = ٥٪

٤ ــ في أربع تجارب لاختبار تأثير نوعين أ، ب من السماد على محصول البطاطس وجد أن الإنتاج قد زاد عند استعمال السماد أ عنه عند استعمال السماد ب بالمقادير الآتية في الفدان: ٥٤٦٤ر٠ ــ ٣٠١٣ر٠ ــ ٥٢٤١ر١ ــ ٦٧٨٦ر٠ طنا.

(I) هل ترى أن السماد ب مكافىء للسماد أ؟

(II) أنشىء فترة ثقة للفرق بين تأثيري هذين النوعين من السماد.

٥ ــ أخذت عينتان من إنتاج مصنعين من مصانع المصابيح الكهربائية فوجد أن أعمار المصابيح بالساعات في العينتين كما يلي:

العينة الأولى : (١٦٠٠ـ ١٦١٠ـ ١٦٥٠ـ ١٦٨٠ـ ١٧٠٠ـ ١٧٢١ـ ١٨٠٠)

العينة الثانية: (١٥٨٠ـ ١٦٤٠ـ ١٧٠٠ـ ١٧٥٠).

مع افتراض أن تباين أعمار إنتاج المصنعين متساويان.

أ ــ أنشىء فترة ثقة ذات درجة ثقة ٩٩٪ للفرق بين متوسطي أعمار المصابيح في المصنعين.

ب ــ اختبر تساوي متوسطي أعمار المصابيح التي ينتجها المصنعان.

المراجع

أولا : المراجع العربية :

١ ــ «طرق التحليل الإحصائي» د. أحمد عباده سرحان ــ دار المعارف ١٩٦٥ .

٢ ــ «أسس الإحصاء» د. أحمد عباده سرحان ــ د. صلاح الدين طلبه

٣ ــ «مقدمة الإحصاء التطبيقي» د. أحمد عباده سرحان ــ د. سعد الدين الشيال ــ د. ثابت محمود الشريف .

٤ ــ «مبادىء الطرق الإحصائية» د. عبدالرحمن البدري ــ دار النهضة العربية ــ ١٩٦٤ .

٥ ــ «مقدمة الطرق الإحصائية» د. عبداللطيف عبدالفتاح ــ د. أحمد محمد عمر.

٦ ــ «الإحصاء التطبيقي» د. محمد فتحي محمد علي ــ مكتبة عين شمس .

٧ ــ «الإحصاء في اتخاذ القرارات» د. محمد فتحي محمد علي مكتبة عين شمس .

٨ ــ «مبادىء في علم الإحصاء» د. مدني دسوقي مصطفى ــ دار النهضة العربية ــ ١٩٦٥ .

٩ ــ «أسس الإحصاء» د. مصطفى أحمد علي ١٩٧٣ .



ثانيا : المراجع الافرنجية :

1 - A. H. Pollard " Introductory Statistics A Sérvice Course."
Perganon Press (Australia) Pty Limited.

2 - Fredrick E. Croxton, Dudley J. Cowden and Sidney Kelein, " Applied General Statistics" Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

3 - Neil R. Vllman, "Elementary Stätistics-An Applied Approach". John Wiley & Sons.

4 - Ronald E. Walpole, "Elementary Statistical Concepts Macmillan Publising Co., Inc. New York Collier Macmillan Publishers London.

فهرست





إصدارات: تهامة للنشر والمكتبات

سلسلة: **الكتاب العربي السعودي**

صدر منها:

العنوان		المؤلف
• الجبل الذي صار سهلا	(نفد)	الأستاذ أحمد قنديل
• من ذكريات مسافر		الأستاذ محمد عمر توفيق
• عهد الصبا في البادية	(قصة مترجمة)	الأستاذ عزيز ضياء
• التنمية قضية	(نفد)	الدكتور محمود محمد سفر
• قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا	(نفد)	الدكتور سليمان بن محمد الغنام
• الظمأ	(مجموعة قصصية)	الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
• الدوامة	(قصة طويلة)	الدكتور عصام خوقير
• غداً أنسى	(قصة طويلة) (نفد)	الدكتورة أمل محمد شطا
• موضوعات اقتصادية معاصرة		الدكتور علي بن طلال الجهني
• أزمة الطاقة إلى أين؟		الدكتور عبدالعزيز حسين الصويغ
• نحو تربية إسلامية		الأستاذ أحمد محمد جمال
• إلى ابنتي شيرين		الأستاذ حمزة شحاتة
• رفات عقل		الأستاذ حمزة شحاتة
• شرح قصيدة البردة		الدكتور محمود حسن زيني
• عواطف إنسانية	(ديوان شعر) (نفد)	الدكتورة مريم البغدادي
• تاريخ عمارة المسجد الحرام	(نفد)	الشيخ حسين عبدالله باسلامة
• وقفة		الدكتور عبدالله حسين باسلامة
• خالتي كدرجان	(مجموعة قصصية) (نفد)	الأستاذ أحمد السباعي
• أفكار بلا زمن		الأستاذ عبدالله الحصين
• كتاب في علم إدارة الأفراد	(الطبعة الثانية)	الأستاذ عبدالوهاب عبدالواسع
• الإبحار في ليل الشجن	(ديوان شعر)	الأستاذ محمد الفهد العيسى
• طه حسين والشيخان		الأستاذ محمد عمر توفيق
• التنمية وجها لوجه		الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
• الحضارة تحد	(نفد)	الدكتور محمود محمد سفر
• عبير الذكريات	(ديوان شعر)	الأستاذ طاهر زمخشري
• لحظة ضعف	(قصة طويلة)	الأستاذ فؤاد صادق مفتي
• الرجولة عماد الخلق الفاضل		الأستاذ حمزة شحاتة
• ثمرات قلم		الأستاذ محمد حسين زيدان
• بائع التبغ	(مجموعة قصصية مترجمة)	الأستاذ حمزة بوقري
• أعلام الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة	(تراجم)	الأستاذ محمد علي مغربي
• النجم الفريد	(مجموعة قصصية مترجمة)	الأستاذ عزيز ضياء
• مكانك تحمدي		الأستاذ أحمد محمد جمال
• قال وقلت		الأستاذ أحمد السباعي
• نبض		الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
• نبت الأرض		الدكتورة فاتنة أمين شاكر
• السعد وعد	(مسرحية)	الدكتور عصام خوقير

• قصص من سومرست موم (مجموعة قصصية مترجمة)	الأستاذ عزيز ضياء
• عن هذا وذاك (الطبعة الثانية)	الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
• الأصداف (ديوان شعر)	الأستاذ أحمد قنديل
• الأمثال الشعبية في مدن الحجاز (نفد)	الأستاذ أحمد السباعي
• أفكار تربوية	الدكتور ابراهيم عباس نتو
• فلسفة المجانين	الأستاذ سعد البواردي
• خدعتني بحبها (مجموعة قصصية)	الأستاذ عبدالله بوقس
• نقر العصافير (ديوان شعر)	الأستاذ أحمد قنديل
• التاريخ العربي وبدايته (الطبعة الثالثة)	الأستاذ أمين مدني
• المجاز بين اليمامة والحجاز (الطبعة الثانية)	الأستاذ عبدالله بن خميس
• تاريخ الكعبة المعظمة (الطبعة الثانية)	الشيخ حسين عبدالله باسلامة
• خواطر جريئة	الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ
• السنيورة (قصة طويلة)	الدكتور عصام خوقير
• رسائل إلى ابن بطوطة (ديوان شعر)	الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي
• جسور إلى القمة (تراجم)	الأستاذ عزيز ضياء
• تأملات في دروب الحق والباطل	الشيخ عبدالله عبدالغني خياط
• الحمى (ديوان شعر)	الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي
• قضايا ومشكلات لغوية	الأستاذ أحمد عبدالغفور عطار
• ملامح الحياة الاجتماعية في الحجاز في القرن الرابع عشر للهجرة	الأستاذ محمد علي مغربي
• زيد الخير	الأستاذ عبدالعزيز الرفاعي
• الشوق إليك (مسرحية شعرية)	الأستاذ حسين عبدالله سراج
• كلمة ونصف	الأستاذ محمد حسين زيدان
• شيء من الحصاد	الأستاذ حامد حسن مطاوع
• أصداء قلم	الأستاذ محمود عارف
• قضايا سياسية معاصرة	الدكتور فؤاد عبدالسلام الفارسي
• نشأة وتطور الإذاعة في المجتمع السعودي	الأستاذ بدر أحمد كريم
• الإعلام موقف	الدكتور محمود محمد سفر
• الجنس الناعم في ظل الإسلام	الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول
• ألحان مغترب (ديوان شعر) (الطبعة الثانية)	الأستاذ طاهر زمخشري
• غرام ولّادة (مسرحية شعرية) (الطبعة الثانية)	الأستاذ حسين عبدالله سراج
• سير وتراجم (الطبعة الثالثة)	الأستاذ عمر عبدالجبار
• الموزون والمخزون	الشيخ أبوتراب الظاهري
• لجام الأقلام	الشيخ أبوتراب الظاهري
• نقاد من الغرب	الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي
• حوار.. في الحزن الدافيء	الأستاذ عبدالله عبدالرحمن جفري
• صحة الأسرة	الدكتور زهير أحمد السباعي
• سباعيات (الجزء الثاني)	الأستاذ أحمد السباعي
• خلافة أبي بكر الصديق	الشيخ حسين عبدالله باسلامة
• البترول والمستقبل العربي (الطبعة الثانية)	الأستاذ عبدالعزيز مؤمنة
• إليها.. (ديوان شعر)	الأستاذ حسين عبدالله سراج
• من حديث الكتب (ثلاثة أجزاء) (الطبعة الثانية)	الأستاذ محمد سعيد العامودي
• أيامي	الأستاذ أحمد السباعي

العنوان		المؤلف
التعليم في المملكة العربية السعودية	(الطبعة الثانية)	الأستاذ عبدالوهاب عبدالواسع
أحاديث وقضايا إنسانية		الدكتور عبدالرحمن بن حسن النفيسة
البعث	(مجموعة قصصية)	الأستاذ محمد علي مغربي
شمعة ظمأى	(ديوان شعر)	الدكتور أسامة عبدالرحمن
الإسلام في نظر أعلام الغرب	(الطبعة الثانية)	الشيخ حسين عبدالله باسلامة
حتى لا نفقد الذاكرة		الأستاذ سعد البواردي
مدارسنا والتربية	(الطبعة الثالثة)	الأستاذ عبدالواهاب عبدالواسع
وحي الصحراء	(الطبعة الثانية)	الأستاذ عبدالله بلخير الأستاذ محمد سعيد عبدالمقصود خوجه
طيور الأبابيل	(ديوان شعر) (الطبعة الثانية	الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
قصص من تاغور	(ترجمة)	الأستاذ عزيز ضياء
التنظيم القضائي في المملكة العربية السعودية		الأستاذ حسن بن عبدالله آل الشيخ
زوجتي وأنا	(قصة طويلة)	الدكتور عصام خوقير
معجم اللهجة المحلية في منطقة جازان		الأستاذ محمد بن أحمد العقيلي
لن تلحد		الشيخ أبوعبدالرحمن بن عقيل الظاهري
عمر بن أبي ربيعة		الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
رجالات الحجاز	(تراجم)	الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
حكاية جيلين		الدكتور عبدالله حسين باسلامة
من أوراقي		الأستاذ محمد سعيد العامودي
في رأيي المتواضع		الدكتور غازي عبدالرحمن القصيبي

تحت الطبع :

العنوان		المؤلف
ماما زبيدة	(مجموعة قصصية)	الأستاذ عزيز ضياء
ديوان حسين عرب		الأستاذ حسين عرب
لا رق في القرآن		الأستاذ ابراهيم هاشم فلالي
من مقالات عبدالله عبدالجبار		الأستاذ عبدالله عبدالجبار
الإسلام في معترك الفكر		الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول
البرق والبريد والهاتف وصلتها بالحب والأشواق والعواطف		الأستاذ عبدالرحمن المعمر
عام ١٩٨٤ لجورج أورويل	(قصة مترجمة)	الأستاذ عزيز ضياء
وجيز النقد عند العرب		الأستاذ عبدالله عبدالوهاب العباسي
هكذا علمني ورد زورث		الشيخ أبوعبدالرحمن بن عقيل الظاهري
الطاقة نظرة شاملة		الدكتور عبدالهادي طاهر
العالم إلى أين والعرب إلى أين ؟		الدكتور بهاء بن حسين عزي
محمد سعيد عبدالمقصود خوجه	(حياته وآثاره)	الدكتور محمد بن سعد بن حسين
التنمية قضية	(الطبعة الثانية)	الدكتور محمود محمد سفر
قراءة جديدة لسياسة محمد علي باشا	(الطبعة الثانية)	الدكتور سليمان بن محمد الغنام
غداً أنسى (قصة طويلة)	(الطبعة الثانية)	الدكتورة أمل محمد شطا
تاريخ عمارة المسجد الحرام	(الطبعة الثانية)	الشيخ حسين عبدالله باسلامة
خالتي كدرجان (مجموعة قصصية)	(الطبعة الثانية)	الأستاذ أحمد السباعي
الحضارة تحد	(الطبعة الثانية)	الدكتور محمود محمد سفر
الجبل الذي صار سهلا	(الطبعة الثانية)	الأستاذ أحمد قنديل

سلسلة :
الكتاب الجامعي

صدر منها :

العنوان	المؤلف
• الإدارة : دراسة تحليلية للوظائف والقرارات الإدارية	الدكتور مدني عبدالقادر علاقي
• الجراحة المتقدمة في سرطان الرأس والعنق (باللغة الإنجليزية)	الدكتور فؤاد زهران الدكتور عدنان جمجوم الدكتور محمد عيد
• النمو من الطفولة إلى المراهقة	الدكتور محمد جميل منصور الدكتور فاروق سيد عبدالسلام
• الحضارة الإسلامية في صقلية وجنوب إيطاليا	الدكتور عبدالمنعم رسلان
• النفط العربي وصناعة تكريره	الدكتور أحمد رمضان شقلية
• الملامح الجغرافية لدروب الحجيج	الأستاذ سيد عبدالمجيد بكر
• علاقة الآباء بالأبناء (دراسة فقهية)	الدكتورة سعاد ابراهيم صالح
• مبادىء القانون لرجال الأعمال	الدكتور محمد ابراهيم أبوالعينين
• الاتجاهات العددية والنوعية للدوريات السعودية	الأستاذ هاشم عبده هاشم
• قراءات في مشكلات الطفولة	الدكتور محمد جميل منصور
• شعراء التروبادور (ترجمة)	الدكتورة مريم البغدادي
• الفكر التربوي في رعاية الموهوبين	الدكتور لطفي بركات أحمد
• النظرية النسبية	الدكتور عبدالرحمن فكري الدكتور محمد عبدالهادي كامل
• أمراض الأذن والأنف والحنجرة (باللغة الإنجليزية)	الدكتور أمين عبدالله سراج الدكتور سراج مصطفى زقزوق
• المدخل في دراسة الأدب	الدكتورة مريم البغدادي
• الرعاية التربوية للمكفوفين	الدكتور لطفي بركات أحمد
• أضواء على نظام الأسرة في الإسلام	الدكتورة سعاد ابراهيم صالح
• الوحدات النقدية المملوكية	الدكتور سامح عبدالرحمن فهمي
• الأدب المقارن (دراسة في العلاقة بين الأدب العربي والآداب الأوروبية)	الدكتور عبدالوهاب علي الحكمي
• هندسة النظام الكوني في القرآن الكريم	الدكتور عبدالعليم عبدالرحمن خضر
• التجربة الأكاديمية لجامعة البترول والمعادن	الدكتور خضير سعود الخضير
• مبادىء الطرق الإحصائية	الدكتور جلال الصياد الدكتور عبدالحميد محمد ربيع

تحت الطبع :

العنوان	المؤلف
• المنظمات الاقتصادية الدولية	الدكتور حسين عمر
• الاقتصاد الاداري	الدكتور فرج عزت
• التعلم الصفي	الدكتور محمد زياد حمدان
• الاقتصاد الصناعي	الدكتور سليم كامل درويش
• مبادىء الأحصاء	الدكتور جلال الصياد الأستاذ عادل سمرة
• دراسات في الإعراب	الدكتور عبدالهادي الفضلي

سلسلة :

رسائل جامعية

صدر منها :

- صناعة النقل البحري والتنمية في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
  الدكتور بهاء حسين عزّي
- الخراسانيون ودورهم السياسي في العصر العباسي الأول
  الأستاذة ثريا حافظ عرفة
- الملك عبدالعزيز ومؤتمر الكويت
  الأستاذة موضي بنت منصور بن عبدالعزيز آل سعود
- العثمانيون والإمام القاسم بن علي في اليمن
  الأستاذة أميرة علي المداح
- القصة في أدب الجاحظ
  الأستاذ عبدالله باقازي
- تاريخ عمارة الحرم المكي الشريف
  الأستاذة فوزية حسين مطر
- النظرية التربوية الإسلامية
  الأستاذة آمال حمزة المرزوقي
- نظام الحسبة في العراق.. حتى عصر المأمون
  الأستاذ رشاد عباس معتوق
- المقصد العلي في زوائد أبي يعلي الموصلي (تحقيق ودراسة)
  الدكتور نايف بن هاشم الدعيس
- الجانب التطبيقي في التربية الإسلامية
  الأستاذة ليلى عبدالرشيد عطار
- الدولة العثمانية وغربي الجزيرة العربية
  الأستاذ نبيل عبدالحي رضوان
- دراسة ناقدة لأساليب التربية المعاصرة في ضوء الإسلام
  الأستاذة فتحية عمر حلواني
- الحياة الاجتماعية والاقتصادية في المدينة المنورة في صدر الإسلام
  الأستاذة نورة بنت عبدالملك آل الشيخ
- دراسة اثنوغرافية لمنطقة الاحساء (باللغة الانجليزية)
  الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- عادات وتقاليد الزواج بالمنطقة الغربية من المملكة العربية السعودية (دراسة ميدانية انثروبولوجية حديثة)
  الأستاذ أحمد عبدالاله عبدالجبار
- افتراءات فيليب حتي وكارل بروكلمان على التاريخ الإسلامي
  الأستاذ عبدالكريم علي باز
- دور المياه الجوفية في مشروعات الري والصرف بمنطقة الإحساء بالمملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)
  الدكتور فايز عبدالحميد طيب
- تقويم النمو الجسماني والنشوء
  الدكتورة ظلال محمود رضا

تحت الطبع :

- الطلب على الإسكان من حيث الاستهلاك والاستثمار
  الدكتور فاروق صالح الخطيب
- العقوبات التفويضية وأهدافها في ضوء الكتاب والسنة
  الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- العقوبات المقدرة وحكمة تشريعها في ضوء الكتاب والسنة
  الدكتور مطيع الله دخيل الله اللهيبي
- تطور الكتابات والنقوش في الحجاز منذ فجر الإسلام وحتى منتصف القرن الثالث عشر
  الأستاذ محمد فهد عبدالله الفعر
- التصنيع والتحضر في مدينة جدة
  الدكتورة عواطف فيصل بياري



صدر منها:

• حارس الفندق القديم (مجموعة قصصية)		الأستاذ صالح ابراهيم
• دراسة نقدية لفكر زكي مبارك (باللغة الانجليزية)		الدكتور محمود الشهابي
• التخلف الإملائي		الأستاذة نوال عبدالمنعم قاضي
• ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودية		إعداد إدارة النشر بتهامة
• ملخص خطة التنمية الثالثة للمملكة العربية السعودي	(باللغة الانجليزية)	إعداد إدارة النشر بتهامة
• تسالي (من الشعر الشعبي)	(الطبعة الثانية)	الدكتور حسن يوسف نصيف
• كتاب مجلة الأحكام الشرعية على مذهب الإمام أحمد بن حنبل الشيباني		الشيخ أحمد بن عبدالله القاري
	(دراسة وتحقيق)	الدكتور عبدالوهاب إبراهيم أبوسليمان الدكتور محمد إبراهيم أحمد علي
• النفس الإنسانية في القرآن الكريم		الأستاذ إبراهيم سرسيق
• واقع التعليم في المملكة العربية السعودية (باللغة الإنجليزية)	(الطبعة الثانية)	الدكتور عبدالله محمد الزيد
• صحة العائلة في بلد عربي متطور (باللغة الإنجليزية)		الدكتور زهير أحمد السباعي
• مساء يوم في آذار (مجموعة قصصية)		الأستاذ محمد منصور الشقحاء
• النبش في جرح قديم (مجموعة قصصية)		الأستاذ السيد عبدالرؤوف
• الرياضة عند العرب في الجاهلية وصدر الإسلام		الدكتور محمد أمين ساعاتي
• الاستراتيجية النفطية ودول الأوبك		الأستاذ أحمد محمد طاشكندي
• الدليل الأبجدي في شرح نظام العمل السعودي		الدكتور عاطف فخري
• رعب على ضفاف بحيرة جنيف		الأستاذ شكيب الأموي
• العقل لا يكفي (مجموعة قصصية)		الأستاذ محمد علي الشيخ
• أيام مبعثرة (مجموعة قصصية)		الأستاذ فؤاد عنقاوي
• مواسم الشمس المقبلة (مجموعة قصصية)		الأستاذ محمد علي قدس
• ماذا تعرف عن الأمراض ؟		الدكتور اسماعيل الهلباوي
• جهاز الكلية الصناعية		الدكتور عبدالوهاب عبدالرحمن مظهر
• القرآن وبناء الإنسان		الأستاذ صلاح البكري
• اعترافات أدبائنا في سيرهم الذاتية		الأستاذ علي عبده بركات
• الطب النفسي معناه وأبعاده		الدكتور محمد محمد خليل
• الزمن الذي مضى (مجموعة قصصية)		الأستاذ صالح ابراهيم
• مجموعة الخضراء (دواوين شعر)		الأستاذ طاهر زمخشري
• خطوط وكلمات (رسوم كاريكاتورية)	(الطبعة الثانية)	الأستاذ علي الخرجي
• ديوان السلطانين		الأستاذ محمد بن أحمد العقيلي
• الامكانات النووية للعرب وإسرائيل		الدكتور صدقة يحيى مستعجل
• رحلة الربيع		الأستاذ فؤاد شاكر
• وللخوف عيون (مجموعة قصصية)		الأستاذ أحمد شريف الرفاعي
• البحث عن بداية (مجموعة قصصية)		الأستاذ جواد صيداوي
• الوحدة الموضوعية في سورة يوسف		الدكتور حسن محمد باجودة

العنوان	المؤلف
• المجنونة اسمها زهرة عباد الشمس (ديوان شعر)	الأستاذة منى غزال
• من فكرة لفكرة (الجزء الأول)	الأستاذ مصطفى أمين
• رحلات وذكريات	الأستاذ عبدالله حمد الحقيل
• ذكريات لا تنسى	الأستاذ محمد المجذوب
• تاريخ طب الأطفال عند العرب	الدكتور محمود الحاج قاسم
• مشكلات بنات	الأستاذ أحمد شريف الرفاعي
• دراسة في نظام التخطيط (في المملكة العربية السعودية)	الأستاذ يوسف ابراهيم السلوم
• نفحات من طيبة (ديوان شعر)	الأستاذ علي حافظ
• الأسر القرشية .. أعيان مكة المحمية	الأستاذ أبو هشام عبدالله عباس بن صديق
• الماء ومسيرة التنمية (في المملكة العربية السعودية)	الأستاذ مصطفى نوري عثمان

تحت الطبع :

العنوان	المؤلف
• إليكم شباب الأمة	الشيخ سعيد عبدالعزيز الجندول
• سرايا الإسلام	الشيخ أبو تراب الظاهري
• قراءات في التربية وعلم النفس	الأستاذ فخري حسين عزّي الدكتور لطفي بركات أحمد
• الحجاز واليمن في العصر الأيوبي	الدكتور جميل حرب محمود حسين
• ملامح وأفكار	الأستاذ أحمد شريف الرفاعي
• المذاهب الأدبية في شعر الجنوب	الدكتور علي علي مصطفى صبح
• النظرية الخلقية عند ابن تيمية	الدكتور محمد عبدالله عفيفي
• الكشاف الجامع لمجلة المنهل	الأستاذ عبدالله سالم القحطاني
• ديوان حمام	الأستاذ محمد مصطفى حمام
• رحلة الأندلس	الدكتور حسين مؤنس
• فجر الأندلس	الدكتور حسين مؤنس
• قريش والاسلام	الدكتور حسين مؤنس
• الدفاع عن الثقافة	الدكتور عبدالعزيز شرف
• الشعر المعاصر على ضوء النقد الحديث	الأستاذ على مصطفى عبداللطيف السحرتي
• مشكلات لغوية	الدكتور شوقي النجار
• دليل مكة السياحي	اعداد تهامة للنشر والمكتبات
• من فكرة لفكرة (الجزء الثاني)	الأستاذ مصطفى أمين
• مسائل شخصية	الأستاذ مصطفى أمين
• في بيتك طبيب	الدكتور محمد عبدالله القصيمي
• مجموعة فاروق جويدة (دواوين شعر)	الأستاذ فاروق جويده
• السبئيون وسد مأرب	الأستاذ محمود جلال
• البسمات	الدكتور حسن نصيف
• من كوبنهاجن إلى صنعاء (ترجمة)	الأستاذ محمد أحمد الرعدي
• البناء الفني للقصيدة العربية	الدكتور عبدالمنعم خفاجي
• نسيب الشريف الرضي: الحجازيات وقصائد أخر	الدكتورة عاتكه الخزرجي
• الزكاة في الميزان	الدكتور محمد السعيد وهبة الأستاذ عبدالعزيز محمد رشيد جمجوم
• مجموعة النيل (دواوين شعر)	الأستاذ طاهر زمخشري

كتاب للأطفال

TIHAMA

صدر منها :

مجموعة : حكايات للأطفال

ينقلها إلى العربية الأستاذ عزيز ضياء

- سعاد لا تعرف الساعة
- الحصان الذي فقد ذيله
- تورتة الفراولة
- ضيوف نار الزينة
- الضفدع العجوز والعنكبوت
- الكؤوس الفضية الاثنتا عشر
- سرحانة وعلبة الكبريت
- الجنيات تخرج من علب الهدايا
- السيارة السحرية
- كيف يستخدم الملح في صيد الطيور

تحت الطبع

- الأرنب الطائر
- معظم النار من مستصغر الشرر
- لبنى والفراشة
- ساطور حمدان
- وأدوا الأمانات إلى أهلها
- سوسن وظلها
- الهدية التي قدمها سمير
- أبو الحسن الصغير الذي كان جائعا
- الأم ياسمينة واللص

مجموعة : لكل حيوان قصة

للأستاذ يعقوب محمد اسحاق

- القرد
- الكلب
- السلحفاة
- الأسد
- الحمار الأهلي
- الفرس
- الغزال
- الوعل
- الضب
- الغراب
- الجمل
- البغل
- الفراشة
- الدجاج
- الحمار الوحشي
- الجاموس
- الثعلب
- الأرنب
- الذئب
- الفأر
- الخروف
- البط
- الببغاء
- الحمامة
- البوم
- البجع
- الهدهد
- الكنغر
- الخفاش
- النعام
- فرس النهر
- التمساح
- الضفدع
- الدب
- الخرتيت

مجموعة : حكايات كليلة ودمنة

إعداد : الأستاذ يعقوب محمد اسحاق

- عندما أصبح القرد نجارا
- الغراب يهزم الثعبان
- أسد غررت به أرنب
- المكاء التي خدعت السمكات

تحت الطبع

- لقد صدق الجمل
- الكلمة التي قتلت صاحبتها
- سمكة ضيعها الكسل
- قاض يحرق شجرة كاذبة

مجموعة : التربية الإسلامية — للأستاذ يعقوب محمد اسحاق

- الله أكبر
- قد قامت الصلاة
- الصـــوم
- الصدقات
- المسح على الخفين
- المسح على الجبيرة والعُصابة
- الصـــلاة
- الاستخارة
- صلاة الجنازة
- سجود التلاوة
- الزكاة
- زكاة الفطر
- صلاة المسبوق
- صلاة الجمعة
- صلاة الكسوف والخسوف
- زكاة النقدين
- زكاة بهيمة الأنعام
- زكاة العروض
- الشهادتان
- أركان الإسلام
- التيمم
- الوضـــوء

قصص متنوعة :

• الصرصور والنملة	الأستاذ عمار بلغيث
• السمكات الثلاث	الأستاذ عمار بلغيث
• النخلة الطيبة	الأستاذ اسماعيل دياب
• الكتكوت المتشرد	الأستاذ عمار بلغيث
• المظهر الخادع	الأستاذ عمار بلغيث
• بطوط وكتكت	الأستاذ اسماعيل دياب

كتاب الناشئ

صدر منها :

مجموعة:وطني الحبيب

• جدة القديمة	الأستاذ يعقوب محمد اسحق
• جدة الحديثة	الأستاذ يعقوب محمد اسحق

مجموعة:حكايات ألف ليلة وليلة

• السندباد والبحر	الأستاذ يعقوب محمد اسحق

• الديك المغرور والفلاح وحماره	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• الطاقية العجيبة	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• الزهرة والفراشة	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• سلمان وسليمان	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• زهور البابونج	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• سنبلة القمح وشجرة الزيتون	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• نظيمة وغنيمة	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• جزيرة السعادة	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• الحديقة المهجورة	الأستاذة فريدة محمد علي فارسي
• اليد السفلى	إعداد { الدكتور محمد عبده يماني / الأستاذ يعقوب محمد اسحق }
• عقبة بن نافع	{ الدكتور عبدالفتاح اسماعيل شلبي / الدكتور سعد اسماعيل شلبي }

كتب صدرت باللغة الانجليزية

Books Published in English by Tihama

- Surgery of Advanced Cancer of Head and Neck.
  By: F.M. Zahran
  A.M.R. Jamjoom
  M.D.EED
- Zaki Mubarak: A Critical Study.
  By Dr. Mahmud Al Shihabi
- Summary of Saudi Arabian
  Third Five Year Development Plan
- Education in Saudi Arabia, A Model with Difference Second Edition
  By Dr. Abdulla Mohamed A Zaid
- The Health of the Family in A Changing Arabia
  By Dr. Zohair A. Sebai
- Diseases of Ear, Nose and Throat
  By: Dr. Amin A. Siraj
  Dr. Siraj A. Zakzouk
- Shipping and Development in Saudi Arabia
  By: Dr. Baha Bin Hussein Azzee
- Tihama Economic Directory.
- Riyadh Citiguide.
- Banking and Investment in Saudi Arabia.
- A Guide to Hotels in Saudi Arabia.
- Who,s Who in Saudi Arabia.
- An Ethnographic Study of Al-Hasa Region of Eastern Saudi Arabia
  By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib
- The Role Of Groundwater In The Irrigation And Drainage Of
  The Al Hasa Of Eastern Saudi Arabia
  By: Dr. Faiz Abdelhameed Taib